

NEUTONI

Genesis Curvarum per Umbras.

Murdoch / P SEU

PERSPECTIVÆ UNIVERSALIS

ELEMENTA;

EXEMPLIS

Coni Sectionum

ET

Linearum Tertii Ordinis

ILLUSTRATA.



LONDINI:

Apud A. MILLAR. M.DCC.XLVI.



V. C.

MARTINO FOLKES,
REGIAE SOCIETATIS PRAESIDI,
TRACTATUM HUNC,
HONORIS ET OFFICII CAUSÂ,

D. D.

Patricius Murdoch.

MARTINO FOLKES

REGIAE SOCIETATIS PRÆSIDI

TRACTATUM HUNG.

HONORIS ET OFFICII CAUSA

Poloniae Historiam

A

LECTORI S.

*M*agnitudo extensa alia est Realis magis et Constans, quae ejusdem Generis Mensuram semper et ubique admittit : alia Apparens, cujus Idea per Visûs praecipue Organum menti defertur ; varia ipsa et mutabilis pro vario Visibilis situ ; certâ tamen Variationis lege, quae ex datis Conditionibus determinetur*. Unde, pro duplici Objecto, duplex etiam Geometria censerî potest ; quarum alteram Visibilium, sive Opticam, appellemus.

Magni-

* Hujus distinctionis vi explodentur Commenta quaedam a Scepticis venditata.

Magnitudines ad datum aliquod punctum, ceu Oculum, sic relatas saepius contemplati sunt Mathematici, Graphices tamen usum feré respicientes, Sphaerae mundanae descriptionem, et similia. Veteres certé haec levius attigisse testatur Optica, ut fertur, Euclidis; luculentiùs etiam Pappi Lib. VI. Prop. 54. Neque ante Newtonum reperias qui ad universam Geometriam pertinere viderit, et plura de Figuris Curvilineis Problemata vix aliunde esse solvenda.

*Is quidem in Articulo de Genesi Curvarum per Umbras, Enumerationi Linearum Tertii Ordinis subjuncto rem totam diserté exposuit, "Curvas
" omnes ejusdem Generis è Simplici-
" oribus quibusdam generari" docens, non secus atque Coni Sectiones è Circulo.*

Idem

*Idem Transmutationem Curvarum in alias ejusdem Generis Curvas, in Lemm. XXII. Princip. tradiderat : in quâ Geometriam hanc Opticam universam contineri intelliget quisquis Lemma istud, et quae sequuntur, cum Doctrinâ Projectionum contulerit *.*

Quo igitur Methodi praestantissimae Usus Exemplis comprobarem, Linearum Secundi et Tertii Ordinis Enumerationem (Anno 1732) confeci, praemissis, Lemmatum loco, Perspectivae Elementis. Ea deinde Amicis quibusdam visa ita non displicere, quin edita Geometriae studiosis grata fore judicarent : mihi autem diversis omnino et severioribus
Studiis

* *Vid. infr. pag. 57.*

Studiis detento, horum Consiliis nunc tandem obtemperare licuit.

Opusculi ipsius Rationem atque Ordinem paucis accipe. Sectio Prima Perspectivae Linearis Principia complectitur; iis etiam utilis futura qui Graphicen solam ediscere cupiunt, de ceteris minus solliciti. Haud enim affirmare dubitem, huic Proposito satis fore paucula quae ibi docentur Elementa; modo quis Geometriâ Euclideâ instructus, Figuras quam plurimas sibi delineandas proponat; neque aliorum descriptionibus pueriliter imitandis tempus atque operam ludat.

Secunda Projectionum Affectiones Geometricas tradit; unde Curvam quamlibet ex umbrâ alterius Datae Genitam, ex Crurum Numero, Specie, Plagis,

Plagis, in promptu erit definire. Projectiones etiam quâ ratione Aequationibus Algebraicis designentur, breviter indicatur.

Tertiâ Sectione, Projectio Coni Sectionum utilioribus quibusdam Exemplis illustratur. Quae in Stereographicâ Sphaerae Projectione, et in Gnomonicis, difficultatis aliquid habent obiter explicantur : addito etiam Problemate uno ex Astronomicis, de Planetarum Orbitis determinandis.

Subjungitur denique Recensio Linearum Tertii Ordinis, numeris suis absoluta ; cum Theorematis nonnullis de iisdem Curvis, quae hac methodo investigata eximium ipsius Usus haud dubiè commonstrant.

Brevitati, quoad licuit, ubique consultum ; ne Scientiarum fastidio in-

a dies

(X)

*dies crescenti, nostrá etiam culpá,
quidquam accederet. Tu, Candide
Lector, sicubi in his erratum fuerit
ignoscas, quæso, et corrigas.*

ERRATA Typographica (praeter leviora
quaedam) sic corrigenda.

Pag. 32. l. penult. pro *habetur* lege *habeatur*.

Pag. 49. l. antepenult. et pag. 50. l. 4. pro A, B, C, &c.

lege A, B, C, &c.

Pag. 50. l. 10. pro A, lege A.

Pag. 52. l. 7. lege simplicioris.

Pag. 70. l. 1. pro posset lege possit. *ibid.* l. 6. lege Figura-
rum. *ibid.* l. 10. lege augurari.

Pag. 108. l. penult. pro *utque* lege *atque*.

ERRATA

Page 1. I should have written "the" instead of "a".
Page 2. I should have written "the" instead of "a".
Page 3. I should have written "the" instead of "a".
Page 4. I should have written "the" instead of "a".
Page 5. I should have written "the" instead of "a".
Page 6. I should have written "the" instead of "a".
Page 7. I should have written "the" instead of "a".
Page 8. I should have written "the" instead of "a".
Page 9. I should have written "the" instead of "a".
Page 10. I should have written "the" instead of "a".

GENESIS CURVARUM

PER

U M B R A S.

S E C T I O I.

Perspectivae Linearis Principia.

DEFINITIONES.

I. FIG. I.

SI recta infinita XY per punctum
immutum Z, ceu *Polum*, ducta,
secundum lineam quamcunque
datam moveatur, atque interea Plano

B

alicui

2 *Genesis Curvarum*

alicui infinito MN positione dato occurrat ; occurfus ille, Lineae Expositae *Projectio*, Planum vero MN , *Planum Projectionis*, dicetur.

COROL. I.

Si *Linea exposita*, ut PL , *recta fuerit*, *recta erit et ipsius Projectio* pL . Superficies nimirum, motu rectae infinitae genita, omnis in eodem Plano existet (2. *el.* 11.) ; cuius itaque Occurfus cum Plano dato erit recta (3. *ejusd.*)

Et si secundum Figuram alicujus rectilineae, parallelogrammae scilicet aut polygonae, recta illa infinita circumagatur, Superficies genita erit binarum *Pyramidum* similium, communi vertice Z ; quarum proinde Intersectiones cum Plano quolibet erunt rectilineae.

COROL. 2.

Sin motus ille secundum *Curvam*, POL , temperetur, Superficies descripta

scripta erit *conici generis*, Vertice Z; et cujus intersectio p o L, cum Plano quovis M N recta esse nequit. Alias recta p o L, cum p L, quae et ipsa recta est, Spatium includere posset.

Punctum Z hic et in sequentibus extra Planum M N locari supponitur, ad distantiam finitam.

D E F. II.

Figuram aut Lineam expositam in eodem Plano constitui ponimus; Planumque illud *Basin* appellamus. Ejusmodi est Planum E F cui inscribitur Curva P O L, et recta P L.

D E F. III.

Recta L S in quâ Planum Projectionis Basin secat, *Linea Baseos* dicitur.

D E F. IV.

Si per Polum Z ductum fuerit Planum Z C I, Basi E F parallelum, Plano Projectionis occurrens in rectâ

B 2

CI;

4 *Genesis Curvarum*

CI; Planum illud *Horizontale* dicetur, atque Intersectio CI, *Linea Horizontalis*.

C O R O L.

Linea Horizontalis est *Lineae Basis* parallela; 16. *el.* 11.

D E F. V.

Per Polum Z Planum ZCG, Planis modo descriptis perpendiculariter infistens, *Verticale* dicetur. Hujus cum Plano Horizontali Intersectio ZC est *Axis* Projectionis. Punctum C in quo hic Lineae Horizontali occurrit, Projectionis *Centrum*: Recta autem CG, in quâ Planum Projectionis secatur, Basis et Plano Horizontali intercepta, *Radius* appellatur.

Et si quando usui fuerit pro Plano Verticali ZCG, aliud, ut Zcpgpπ, usurpare, quod sit Basis aut Plano Projectionis, aut forte utrique, *Obliquum*, Planum Projectionis atque Horizontale, in rectis cg, Zc, secans,
Rectas

Rectas illas, et Punctum c, iisdem vocabulis designabis, addito *Secundariorum* epitheto.

D E F. VI.

Si denique per Polum Z duci intelligatur Planum Z R V, Plano Projectionis parallelum, quod Basin fecet in RV; erit RV *Linea Extremorum*, quia sc. Lineae huic contigua in extrema Projectionis abeunt.

C O R O L.

Linea Extremorum est Lineae Basos parallela.

P R O B L E M A.

Datis Polo Z, Plano Projectionis MN, et puncto P, hujus Projectionem (p) invenire.

Cas. I. Fig. I.

1°. Sit primo punctum P ad alteras partes Plani Projectionis quam Polus Z; et positis quae in Definitionibus

6 *Genesis Curvarum*

tionibus explicata et constructa sunt, si per Axem ZC et punctum P ducatur Planum ZCP , Basim secans in PL , Planum Projectionis in CL ; patet Projectionem quaesitam reperi- tum iri in hoc Plano, et quidem in rectâ ZP . At eadem in rectâ CL reperietur, adeoque in puncto p , ubi ZP , CL se mutuo secant.

Porro quum sint rectae ZC , PL , parallelae (*Def. 4*; et *16 el. 11.*) similia erunt Triangula PLp , ZCp , ad verticem p constituta; et $PL:ZC::Lp:Cp$; five (*compon.*) $PL+ZC:PL::CL:Lp$. Est etiam Angulus ZCI rectus (*Def. 5.*) et huic aequalis PLS (*19. el. 11.*)

Si itaque a Puncto P dato, lineae Basis LS fiat normalis PL , ipsi occurrens in L , et jungatur CL ; distantia PL Axi ZC addita, erit ad eandem PL ut est CL ad Lp quaesitam. At datis punctis Z , P , cum Plano Projectionis, et assumpto Plano quovis per P transeunte, quod Planum

hum Projectionis secans efficiat Lineam Basis LS , dantur PL , ZC , CL ; adeoque et Lp .

Practicam vero Problematis in Plano Constructionem sic expedias, *Fig. 2.*

Ductâ, in plano aliquo, Basis lineâ LS , atque huic normali LQ , in hac fiat LP distantiae puncti dati a lineâ Basis aequalis; atque in LS capiatur LG distantia puncti P a plano Verticali; ut GM rectae LS normalis, intersectionem Plani Verticalis cum Basi exhibeat. In rectâ GM productâ capiantur, ad partes puncto P contrarias, GH aequalis Axi Projectionis, GC aequalis Radio, et per puncta H , P , ductis HN , PM , ipsi LS parallelis, quarum haec Verticali occurrat in M , junctâ etiam CL ; huic in rectâ HN capiatur HK aequalis, et ductâ KM , quae ipsam LG secet in D , si in LC fiat $Lp = DG$, erit p Projectio quaesita.

8 *Genesis Curvarum*

Est enim $MH : MG :: HK : DG$; five, ex Constructione, $PL + ZC$ (in *Fig. 1.*) : $LP :: CL : Lp$. Adeo ut ductâ CI ipsi LS parallelâ, et, in HC productâ, factâ $CZ = GH$, si Plano PG immoto, elevari intelligatur pars schematis $ICGL$ secundum rectam LS , ut datum quemvis Angulum cum Basi efficiat, ac deinde replicetur pars ICZ secundum rectam IC , ut fiat Basi parallela, Schema hoc in praecedens convertetur ; et recta quae Z, P puncta conjungit transibit per p .

Cas. II. Fig. 1 et 3.

2°. Sit punctum expositum ad easdem cum polo Partes, sed minori a Plano Projectionis distantia, ut in P_2 (*Fig. 1.*) ; erit Projectio p_2 in recta CL ad partes L productâ. Est autem $CZ : P_2L :: Cp_2 : Lp_2$ et (*divid.*) $CZ - P_2L : P_2L :: CL : Lp_2$. Et constructio quae in *Fig. 3.* exhibetur eo diversa erit a
praece-

praecedente, quod sint P, M, puncta ad has partes rectae L S, adeoque et K M producta secet D ad alteras partes puncti G.

Cas. III. Fig. 1 et 4.

3^o. Sit denique punctum P ad easdem partes sed ad maiorem a Plano Projectionis distantiam quam est Polus Z, ut in P₃ (*Fig. 1.*) Illius Projectio erit in L C productâ supra Planum Horizontale. Et quum sit $P_3 L : Z C :: L p_3 : C p_3$, et (*convert.*) $P_3 L - Z C : P_3 L :: C L : L p_3$. In Constructione (*Fig. 4.*) erit P in Q L ultra H N productâ, punctum D cadet ad alteras partes puncti L, et erit p in L C productâ, ad partes C.

Atque ex his quaecunque de Punctorum Projectione proponi possunt facile sequuntur ; quae autem de rectilineorum Projectione apud Auctores fusius explicantur, tanquam *Corollaria* ex iisdem deducas.

COROL.

10 *Genesis Curvarum*

COROL. I. *Fig. I.*

Rectae cujusvis $P \Pi$ Projectio $p \pi$ est quae Punctorum P, Π , Projectiones conjungit, (Cor. I. Def. I.)

COROL. 2:

Rectarum omnium lineae Basis LS parallelarum, sive rectae illae in ipsa Basi sint, sive extra illam, sitae, Projectiones, rectae LS et sibi invicem sunt parallelae. Si enim per Polum ducta fuerit ZT lineae Baseos parallela, et circa hanc tanquam Axem rotari intelligatur Planum in quo subinde inveniantur rectae expositae atque earundem Projectiones; ex Elementis constabit Theorema. Quod et ex Praxi modo tradita facile demonstres. Porro, rectarum hujusmodi quae in infinitam abiit distantiam, sive ad has sive ad illas plani Projectionis partes, projicietur in ipsam Horizontalem CI . Et vice versa,
Linea

Linea Extremorum R V projicietur ad distantiam infinitam.

COROL. 3.

Constat etiam, si in Segmenta quaevis dividatur Linea ipsi LS parallela, fore Projectiones directæ ut Segmenta.

COROL. 4.

Rectæ cujusvis PL in Basis ductæ quæ sit lineæ Basis LS normalis, projectio Lp , si opus producta, per centrum C transibit: Liquet ex Constructione: vel etiam fingendo Planum circa Axem ZC revolvi; in quo si inveniatur recta quævis PL , inveniatur et ipsius Projectio Lp , quam per Centrum transire necesse est. Si recta PL in ipso Plano Verticali fuerit; Projectio erit lineæ Basis perpendicularis. Sin ad distantiam infinitam a dicto plano recesserit, Projectio erit ipsa Linea Horizontalis.

COROL.

12 Genesis Curvarum

COROL. 5.

Scriptis pro ZC , PL , CL literis a , d , r , erit in Casu Problematis 1^o, $LP = \frac{rd}{a+d}$; et auctâ d ut evadat $d+x$, erit Projectio $\frac{r \times \overline{d+x}}{a+d+x}$; a quâ si subducatur $\frac{rd}{a+d}$, est residuum $\frac{arx}{a+d \times a+d+x}$ projectio Segmenti x . Unde, si detur Segmentum, erit Projectio ut rectangulum sub distantii terminorum ipsius a Linea Extremorum inversé. Et punctum in recta LP aequabiliter motum, in recta LC moveri videbitur velocitate quae sit inversé ut quadratum distantiae puncti a Linea Extremorum.

COROL. 6.

Rectae $P\Pi$ quae sit ipsi LS obliqua, atque huic parallelarum, Projectiones transibunt per (c) punctum in Linea Horizontali a Centro Primario Diversum. Demonstratur ut
praece-

praecedentia ; ducendo Planum per Polum Z et aliquam e rectis $P\Pi$, quod projectionem efficiat $p\pi$ Horizontali in puncto c occurrentem ; ac deinde Planum illud circa Axem Zc revolvendo. *Harum quoque quae in distantiam abiit infinitam projicietur in Horizontalem CI .* Et ratio quam Segmentorum quorumvis Projectiones inter se obtinent, invenietur ut supra.

COROL. 7.

In universis, *puncta in quibus a Lineâ Extremorum secantur, projiciuntur in infinitum.* Adeoque quae ad Lineam Extremorum concurrunt, abeunt in Parallelas ; et conversim, quae projiciuntur in Parallelas concurrebant ad lineam Extremorum. Unde, et ex COROL. 4 et 6, liquido constat, pro reciproca Planorum Basis et Projectionis functione, linearum Extremorum et Horizontalis functiones quoque invicem reciprocari.

COROL.

C O R O L. 8.

Si de *Angulis* quaeratur : Quoties Linea exposita est rectae LS *normalis*, ut PL ; propter datas CG , GL et Angulum CGL rectum, dantur Anguli GCL , GLC . In stilo *Arithmetico*, ut CG ad GL : ita Radius ad Tangentem Anguli GCL .

Sin ad LS *Obliqua* fuerit ut $P\Pi$; datâ positione $P\Pi$ dabitur ipsius intersectio cum LS , (quae sit g), five intercepta Gg ; datur etiam Cc , centrorum distantia. Et si π sit intersectio Projectionis $p\pi$ et radii CG (si opus producti), propter datas Gg , Cc dabitur ratio $Gg \pm Cc$ ad Cc ; id est ratio CG ad $C\pi$. Datur itaque $C\pi$, et Species Trianguli $C\pi c$, five Angulus $C\pi c$.

Obiter etiam notari potest, quod, datis, in priore Casu, Radio CG et distantia GL , detur Projectionis Lp inclinatio, quaecunque fuerit Axis ZC magnitudo. At secus rem se habere

habere in Casu secundo ; auctâ enim Z C augebitur C c, et contrâ.

C O R O L. 9.

Rectarum Basi insistentium quæ sunt Plano Projectionis parallelæ, projiciuntur in parallelas. Sin, sibi invicem parallelæ, Plano Projectionis utcunque inclinentur ; projectiones ad idem punctum convergent ; illud nempe in quo recta, lineis expositis parallelæ, per polum ducta, Plano Projectionis occurrit.

C O R O L. 10.

Si, quod plerumque fit, Planum Projectionis Basi ponatur rectum, et ad hanc puncta omnia *extra ipsam sita*, demissis sc. perpendiculis, referantur, *horum* projectiones sic invenies. *Fig. 2.*

Sit puncti (Π) Altitudo supra vel infra Basin, a : Perpendiculum vero ab ipso demissum Basi occurrat in P ; cujus Projectio per regulas jam traditas

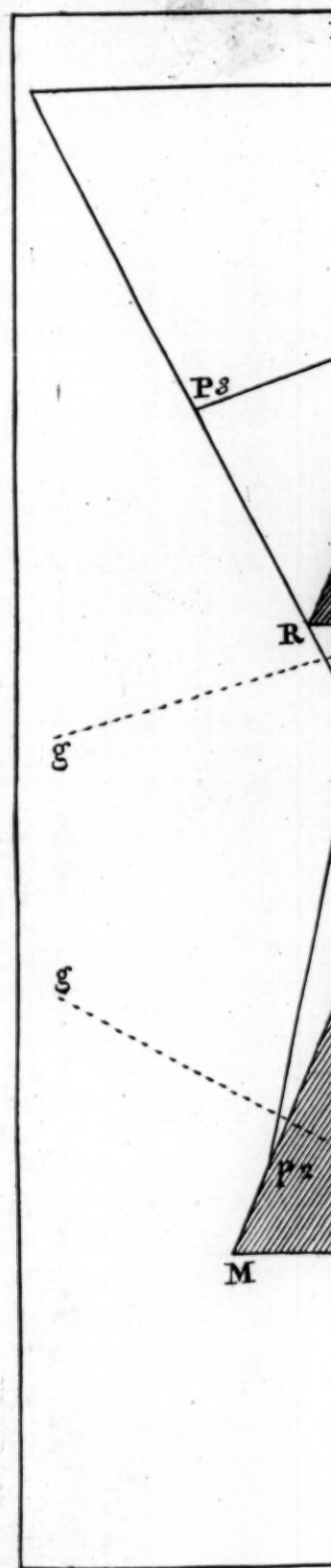
16 *Genesis Curvarum*

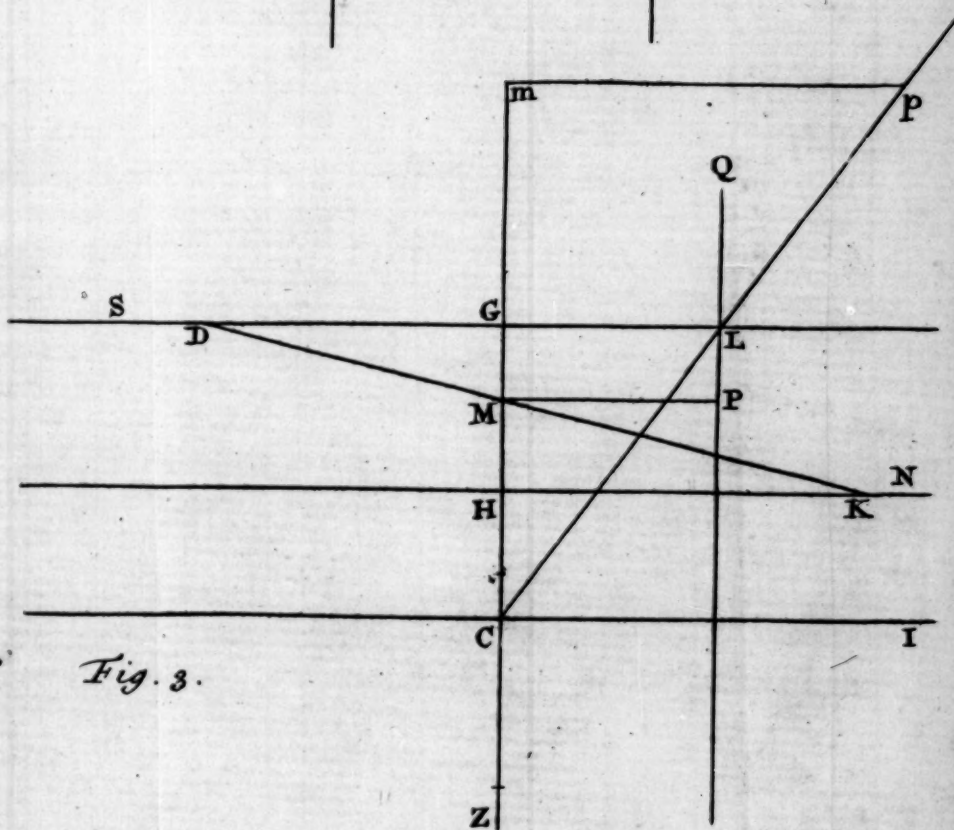
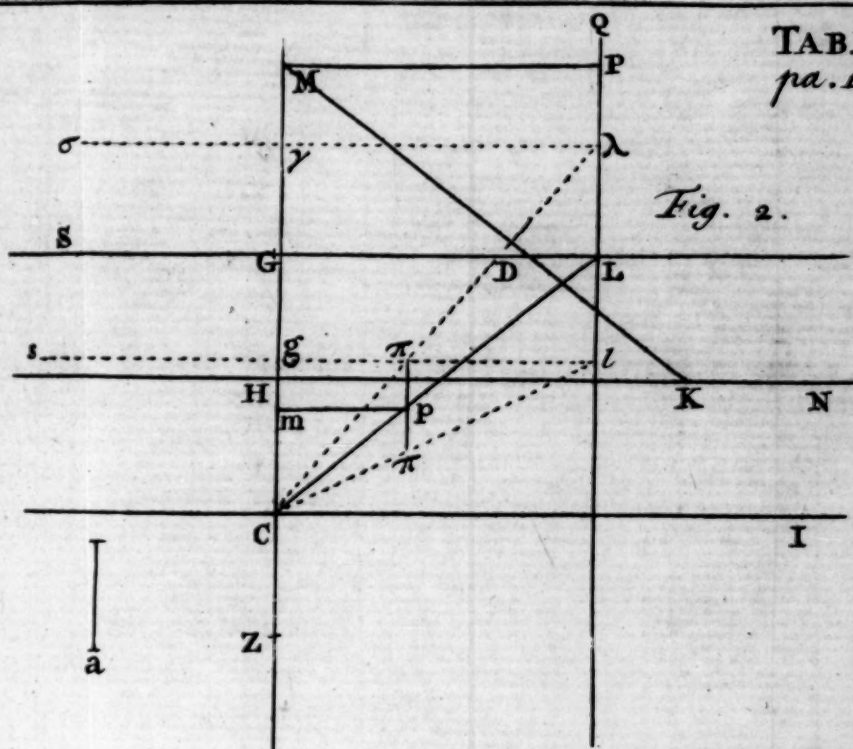
ditas inventa fit p . Et in PL , si opus productâ fiat Ll (five $L\lambda$) $=a$, prout Π supra vel infra Basin locatur, ductâ etiam Cl (five $C\lambda$) Tum vero si $p\pi$ ipsi PL parallela rectae Cl (aut $C\lambda$) occurrat in π , erit π Projectio quaesita.

Nam dato Polo Z ac Plano Projectionis datur Axis normalis ZC . Neque aliud efficit ipsius Π elevatio aut depressio quoad Basin, nisi ut Radius qui erat CG , nunc factus sit $CG \mp a$, i. e. Cg vel $C\gamma$, mantibus ceteris datis. Adeoque ex Analogiis per quas inveniuntur p , π , erit $CL : Lp :: Cl : l\pi :: C\lambda : \lambda\pi$; et $p\pi$ ipsi PL parallela.

C O R O L. II.

Si puncti Π Altitudo Poli Z Altitudinem superet, Projectio erit supra Horizontalem: quod cum *Casu* 3^o Problematis coincidit.





COROL. 12.

Rectilinei cujusvis Projectio e Projectionibus reclarum terminantium conficitur.

COROL. 13.

Polo Z in infinitum remoto, ut sit ZP rectae cuidam datae semper parallela, fiet Projectio, quae dicitur *Orthographica*; quam, per easdem Regulas huic Casui accommodatas, facile describes.

Atque haec de Rectilineorum Projectione sufficiant. Exempla enim, Regulasque illas multiplices de Objectorum particularium descriptione lubens omitto; tum quod ad praesens institutum parum faciant, praesertim vero quod ejusmodi regulas maximam partem inutiles existimem: Qui Perspectivae operam dat, Artem practicam perPraxin ediscat. Principia modo jam posita rité intelligat, cetera proprio marte, assumtis plurimis exemplis,

18 *Genesis Curvarum*

emplis, felicius exequetur. Operationum compendia inter operandum se prodent; cuique sua, adeoque optima, quae memoriâ vix excident, aut si forte exciderint, facilius revocanda.

Notandum denique figuram, ut in praecedentibus, delineatam, Objecti propositi imaginem, oculo in Polo Projectionis posito, tum demum exhibere, si in alterâ Schematis facie eadem lineae inscribantur. Verus enim imaginis situs is est qui ex aversa Schematis facie, tanquam pel lucidi, conspicitur, ut ex demonstratione liquet. Is autem simul ac semel obtinetur, si capiantur puncta P, C ad alteras partes rectae L S. Nos eâ utimur Constructione quae demonstrationi propior videatur, neque a proposito nostro aliena.

SECTIO

S E C T I O II.

I. *De generalibus Projectionum
Symptomatis Geometricis.*

I.

IN Plano Basis fit recta quaevis lineae Basis occurrens, et in eâ punctum P; quo *major*, aut *minor* est puncti hujus distantia a linea Extremorum, eo *minus* aut *magis* distabit ipsius Projectio a Lineâ Horizontali. Unde facile colligitur Curvae cujusvis *Crura infinita* in *Horizontalem* projici. An autem Horizontalis Curvae *Genitae* evadat *Asymptotos*; an ipsam *secet* aut *contingat*, et in quibus punctis, ex Projectione *Tangentis* ad distantiam infinitam semper dignosces.

II.

Puncti illius P, *post* lineam Extre-
morum positi, ut in *Cas. 3^o* Proble-
C 2 matis,

maticis, Projectio erit *ad alteras partes Plani Verticalis et Lineae Horizontalis*, in angulo sc. ad Verticem C opposito illi in quo fuerat dum punctum *ante* Lineam Extremorum versabatur. Et ductâ Subtensâ, aut binis contingentibus, *plaga Convexitatis* Arcus cujusvis innotescet. Hinc etiam, an Curva *contrarium flexum* ad *Horizontalem*, ex projectione, acceperit, intelliges.

III.

Datis positione Polo, ac Basi cum Figura inscripta, *Varia Plani Projectionis distantia Figurae genitae Speciem nullatenus mutat*, modo Planum illud situm conservet sibi parallelum. Sic enim Projectiones omnes sunt similes ejusdem solidi Conici Sectiones, magnitudine tantum diversae. Quoties igitur solam Figurae Speciem contemplamur, Plani Projectionis distantia quaevis indifferenter assumi poterit.

IV.

IV.

Mutetur utcunque Planorum ad invicem Inclinationo ; vel etiam, servatâ inclinatione, mutetur Figurae expositae situs, et mutabitur Figurae projectae Species *homologa* (exceptis projectionibus quibusdam subcontrariis); At manebit Species *homonoma*, seu figurae *nomen commune*, quamdiu figura exposita ad easdem partes Lineae Extremorum locatur.

V.

Eousque mutetur Planorum Inclinationo, aut Figurae datae Positio, ut ipsam secet Linea Extremorum ; et *Projectio, ex unaquâque intersectione, bina Crura Hyperbolica accipiet*. Secet, v. g. in *Fig. 5.* Linea Extremorum HN Curvam RPpR in P, p punctis ; et ductis ad eadem puncta contingentibus PQ, pQ, quae concurrant in Q ; Punctis P, p contigua projicientur in quatuor Crura *Hyperbolica*

bolica ad Asymptotos é contingentibus ortas, in projectione ipsius *Q* se de-
cussantes.

VI.

Motu feratur parallelo recta *HN*, quam pro Lineâ Extremorum usurpamus, donec Curvam contingat. Et quo magis contingentium intersectio *Q* ad Curvæ Verticem accedit, eo longius recedet ipsius Projectio. Postquam vero in ipsum Verticem, id est in Lineam Extremorum, inciderit, *Asymptoti* quidem nusquam reperientur, et Crura ex *Hyperbolicis* fient *Parabolica*.

Eadem ratione, si Linea Extremorum Curvam in uno puncto secans in alio ipsam contingat, erunt duo Crura *Hyperbolica* et totidem *Parabolica*. Et figura genita erit ex illis quae *Hyperbolo-Parabolæ* nominantur.

VII.

VII.

Plana *Basis* et *Projectionis*, ut jam monitum, sunt *reciproca*; adeoque et *Lineae Extremorum* et *Horizontalis*. Unde liquet quod *Curvam quamlibet* (C) *alterius Curvae* (K) *projectione genitam concipere liceat*. *Projecta* sc. C in K, *Plana ista Vices alternent* et redibit K in C.

VIII.

Et quum *recta quae Curvam contingit ad intersectionem Lineae Extremorum abeat in Asymptoton*; vicissim *redibunt Asymptoti Extrema in contactum ad Lineam Horizontalem*. Ex quo deducitur, *Asymptoton rectam Curvae in tot punctis occurrere posse quot ipsa est dimensionum demptis duobus*: Duae nimirum intersectiones, e quibus conflatur contactus, perierant in *Projectione*. Sic *Asymptotos Lineae tertii ordinis, Curvam in unico Puncto*

24 *Genesis Curvarum*

secare potest; ea Hyperbolae Conicae nusquam.

IX.

Duo Crura Parabolica, quoties in Curva aliqua comparuerint, numerum Asymptoton rectarum quas Curva habere poterat binario minuunt. Sic in Lineis tertii ordinis (quae tres Asymptotos admittunt pro numero punctorum in quibus a lineâ Extremorum secari possunt) si duo Crura fuerint Parabolica, non relinquetur nisi unica Asymptotos ad duo Crura Hyperbolica.

X.

Linearum Occursus atque Inflexus quicunque in figura Genitrice manent quoque in Genitâ; nisi fuerint ad Lineam Extremorum. Intersectio Intersectionem, Contactus Contactum dabit, Cuspis Cuspitem, Nodus Nodum, Punctum contrarii Flexûs ejusmodi

modi punctum in Projectione; et sic porro.

XI.

Unde consequitur “*Curvam Genitam fore ejusdem Ordinis cum Genetrice.*” Quum enim Curvae Ordo per numerum punctorum in quibus rectae occurrere potest designetur, si recta aliqua Curvam expositam secet in punctis numero n , Projectae projectam in totidem punctis occurrere necesse est.

XII.

Excipe casum ubi Intersectio aliqua est ad Lineam Extremorum; quâ in infinitum projectâ, relinquentur Genitae intersectiones $n - 1$. Quae ipsa ratio est ob quam “*Ordinatae Asymptoto alicui parallelae in Aequatione Curvam desinente unâ dimensione deprimuntur.*”

SCHOLIUM I.

Haec omnia ex iis quae in *Seç. I.* tradita sunt ita facile elicias ut prolixiore Demonstrationum apparatu non opus sit. Neque aliud fere ad Projectiones quasvis ritè intelligendas requiras: Exinde enim Arcus cujusvis *plaga* et *convexitas* innotescant, quâ item ratione Crura infinita Figuræ Genitricis ad *Horizontalem* redeant, ductu continuo ipsam *secantes* aut *contingentes*, forte etiam secundum eandem tanquam *Asymptoton* protensae. Quorum in sequentibus plura Exempla videre est.

Proderit tamen ut qui hujusmodi Enumerationes suscipere velit, a *Projectionibus rectilineis* initium ducat, in iisque se aliquamdiu exerceat. Rectae enim Curvis *adscriptae*, *Contingentes*, *Asymptoti*, *Triangula* aut *Parallelogramma*, ipsarum *Symptomata* in Projectionibus determinant atque optime produnt. Quo spectant
Exempla

Exempla quae in *Fig. 6 & 7* exhibentur.

In quibus est *C z x y Linea Horizontalis*, *C centrum Projectionis*, *HN Linea Extremorum*, *LS Linea Baseos*; et Triangulum *P R T* projicitur in *p r t*. Latera quoque Triangulorum in infinitum producta intelliguntur.

In Exemplo priore ubi *Linea Extremorum* extra Triangulum ponitur.

1°. Latera finita *P R*, *P T*, *R T*, dant latera finita *p r*, *r t*, *p t*.

2°. Lateris alicujus *P T* producti Segmentum *P A* quod termino *P* et lineae *Extremorum* interjacet, projicitur in infinitam *p a*. Recta infinita *A X* projicitur in infinitam *a x*, termino *A* abeunte in infinité distantem *a*, et termino infinité distante *X* redeunte in *x* ad *Lineam Horizontalem*. Infinita autem *T X* dat finitam *t x*, quoniam *T* non est ad *Lineam Extremorum*, et *X* redit ad *Horizontem*

28 *Genesis Curvarum*

tem in x . Nec diversa in reliquis ratio. Tres nempe rectae infinitae intra quas continetur triangulum, projiciuntur in totidem infinitas *alternatâ* tamen punctorum A, E, I ; et Punctorum X, Y, Z *denominatione*.

3°. Proinde si punctum aliquod fuerat intra Triangulum PRT , aut in Angulo YRZ Verticali, aut forte in Spatio $ZRTX$ sub Base RT , ejusdem projectio intra locorum istorum projectiones reperietur, in triangulo rpt , in triangulo zry , aut in Spatio $zrtx$ respectivè. Quod et de Curvae alicujus Arcu in locis praedictis constituto dicendum.

4°. In *Fig. 7*, ubi linea extremorum HN Latera Trianguli secat in Punctis E, I , res paullo aliter se habet. Latus quidem PT , quod non, nisi productum, lineae Extremorum occurrit, dat Projectionem pt finitam. At Latera ad puncta E, I , interrupta, abeunt in infinitum, et quae Latera rt, rp constituunt, sunt ry, ty ;

ty ; rz , pz , projectiones infinitarum RY , TY ; RZ , PZ .

5°. Quocirca punctum quod intra Triangulum $PR T$ fuerat, projicietur extra triangulum $p r t$; si nempe fuerat in Triangulo $IR E$ quod abscindit HN , Projectio erit in Spatio Verticali interminato $i r e$; sin fuerat intra Trapezium $PI E T$, projicietur in Spatium $i p t e$. Et vicissim, quae in Angulo Verticali $Y R Z$ posita erant, invenientur intra Triangulum $y r z$ sub Linea Horizontali. At quae fuerant sub Base $P T$ in Spatio $Z P T Y$ redibunt in Trapezium $z t p y$. Si, in utraque figura, de Spatio quaeritur in quod ingreditur linea Extremorum HN , quale est Spatium $Z R T X$ sub Base $R T$; distingua-
tur illud in binas partes ad rectam HN terminatas v. g. in $Z R E A X$ et $E T A$; quarum illa projicitur in $er z x a$, haec autem in $e t a$ interminatum supra Horizontalem.

SCHOLIUM 2.

Obiter notari potest, quod cum, ex natura Projectionum, constet rectam quamlibet atque ejusdem Projectionem Lineae Basis occurrere in eodem Puncto; Si (*Fig. 6 & 7*) dentur Punctorum P, T , projectiones p, t , et Linea Basis $L S$, dabitur et r Projectio cujusvis alterius Puncti R . Duc-tis sc. PR, TR quae lineam Basis se-cent in π, τ , rectae $p\pi, t\tau$, si opus productae concurrent in r .

Adeoque si fuerit punctum R ad Curvam in cujus Plano sit recta PT , et sit $p t$ recta aliqua assumpta cujus intersectio cum PT sit σ , et per σ ducatur recta quaevis $L\sigma S$, ad quam sint rectarum $PR, pr; TR, tr$, intersectiones π, τ , erit puncti r Locus Curva ejusdem ordinis cum illa quam percurrit R .

2. De Aequatione Algebraica
Projectionem Curvilineam
designante.

Cas. I.

Ubi Plani Verticalis et Basis Intersectio est Linea Abscissarum Figurae Genetricis, aut huic Parallela.

In Fig. 8, fit $ZHMC$ Planum
Verticale Basin secans in HM , Pla-
num Projectionis in Radio $CG (=r)$,
Horizontale autem in Axe $ZC (=a)$;
ducta ZH ipsi CG parallela Basi oc-
currat in H . Tum vero, si fuerit
 HM variabilis cujus terminus est H ,
termini M projectio m , in quo sc.
 ZM , CG se mutuo secant; erit, ob
triangula ZHM , ZCm similia, HM :
 $HZ (CG) :: ZC : Cm$. Sive scrip-
tis pro Abscissis HM , Cm (quarum
illa a Lineâ Extremorum, haec a
Centro

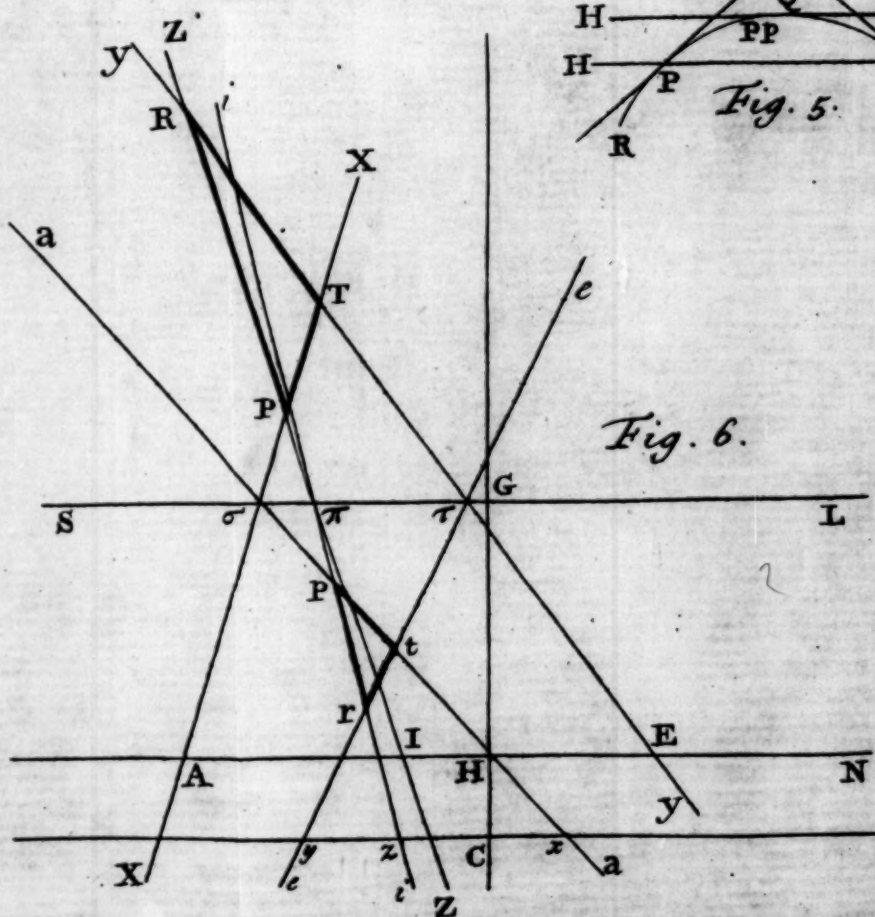
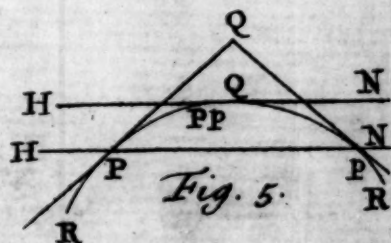
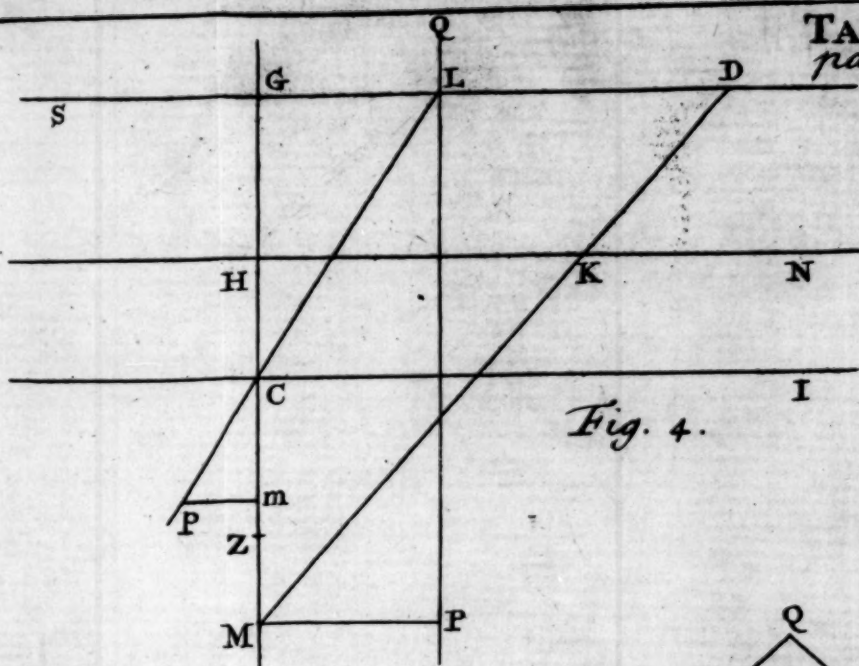
32 *Genesis Curvarum*

Centro Projectionis initium ducit) literis x, z , est $x = \frac{ar}{z}$.

Eadem Abscissae Expressio ex Constructione Problematis deducitur. (*Fig. 2, 3, 4.*) In quibus est $HM : HK (CL) :: GM : GD (Lp)$. Adeoque $HM : HM + GM (HG) :: CL : CL + Lp (Cp)$. Et distantia PM deminuta ut P ad M accedat, erit tandem $CL = CG$, $Cp = Cm$; et ad Analogiam $HM : HG :: CG : Cm$ deventum erit.

Et si fuerit $PM (= y)$, Ordinata ejusdem Curvae cujus Abscissa est x , lineae Basis parallela, hujus Projectio $pm (= v)$; erit $CG : Cm :: GL (PM) : pm$; five $r : \frac{ar}{x} :: \pm y : v$; et $y = \frac{vx}{a} = \frac{rv}{z}$. Atque his Variabilium x, y Valoribus in Æquatione Curvae expositae substitutis, orietur Æquatio in terminis z, v , ad Curvam *genitam*.

Habetur v.g. $y^2 = px^2 + qx + s$ Æquatio ad Coni Sectiones; erit
 v^2



y

$v^3 = \frac{s}{r^2} \times z^3 + \frac{q}{r} \times z + p a^3.$ Sit
 $y^3 = p x^3 + q x^2 + s x + t,$ Æquatio
 ad quinque Parabolas divergentes
Neutoni, et prodibit $v^3 z = \frac{t}{r^3} \times z^3$
 $+ \frac{s a}{r} \times z^2 + q a^2 \times z + p a^3 r.$ In
 genere Æquatio $y^m = p x^m + q x^{m-1}$
 $+ s x^{m-2} + t x^{m-3} + \textcircled{c}. + w,$ dabit
 Æquationem Curvae projectae v^m
 $z^{m-m} = p \times a^m r^{m-m} + q \times a^{m-1} r^{m-m+1}$
 $\times z + s \times a^{m-2} r^{m-m+2} \times z^2 + t \times a^{m-3}$
 $r^{m-m+3} \times z^3 + \textcircled{c}. + w \times r^m \times z^m.$
 Neque aliter procedendum ubi in Æ-
 quatione propositâ fuerint termini é
 potestatibus Variabilium $x, y,$ in se
 ductis utcunque compositi.

Si Curvae expositae Abscissa sit
 recta (ut *QL Fig. 2.*) Axi Projectionis
 Parallela, Æquatio, quoad formam,
 non differet a praecedente, nisi quod
 pro *Radio primario* CG accipiendus
 sit *Secundarius* $CL = r$; et quod

D
Ordi-

34 *Genesis Curvarum*

Ordinatae projectae fiant ad Abscissam
Obliquae in angulo dato.

Cas. II.

*Ubi Linea Extremorum Abscissam
obliqué secat.*

* Sit $P\Pi$ (*Fig. I.*) Linea Abscissarum Figurae Expositae, quae producta lineae Extremorum RV occurrat in H , et sit $H\Pi$ Abscissa quaevis $= x$. Per Polum Z et rectam $HP\Pi$ duci intelligatur Planum cujus intersectio cum Plano Projectionis sit recta $p\pi c$, Projectio sc. rectae $P\Pi$ in infinitum productae. Et ad Punctum c in quo haec Lineae Horizontali occurrit, junctâ Zc , productâ etiam $c\pi p$ ut rectae $HP\Pi$ occurrat ad Lineam Basis LS in Puncto g , positis $a = Zc$, $r = cg$, $c\pi = z$, erit ut in Casu praecedente $x = \frac{ar}{z}$.

Transformetur deinde Aequatio Curvae cujus Abscissa est $H\Pi$, in aliam

* Supple quod deest in *Figura*.

liam quae sit ad Ordinatæ lineæ extremorum parallelas; et si Ordinatam novam litera y , eam Curvæ projectæ literâ v designes, erit etiam nunc $y = \frac{r \cdot v}{z}$; ceteraque ut in *Cas. I.* consequentur.

Si denique Aequatio modo inventa ad formam simpliciorē reducenda est, id quidem per transformationem novam obtineri poterit. Si v. g. eam more *Newtoniano* deprimere velis, *inveniendâ est Aequatio ejusdem Curvæ quæ sit ad Ordinatæ Asymptoto alicui parallelas.* Calculum prolixum magis quam difficilem, brevitatis causâ omitto.

Neque vero id nunc agitur ut Curvarum affectiones, quatenus Aequationibus Algebraicis designantur, operosius tractemus; præsertim quum Vir doctissimus *Jacobus Stirling* in libro singulari, *Lineæ tertii Ordinis* inscripto, id jam præstiterit: plurimæque ejusdem Argumenti in *Geometriam suam Organicam* retulerit

36 *Genesis Curvarum*

Clariff. D. Mac Laurin; pauca tamen, atque in genere, de Aequationibus Opusculo huic inferenda erant, quo Tyrones *Harmoniam* illam, quae inter *Transformationes* qualvis *Algebraicas* easdemque *Geometricas* inviolata manet, facilius percipere queant.

Adnotari etiam poterat, ex Variabilium x, y , Valoribus modo inventis constare, *Aequationem Projectionis fore ejusdem Ordinis cum Aequatione curvae expositae*; id quod cum rationibus Geometricis (*Art. XI. praeced.*) probe congruit. Et, si Curvae *Genitricis* Aequatio *fluxionalis* fuerit, ejusmodi fore Aequationem *Genitae*; quae itaque per *Methodum Fluxionum* inversam describenda erit.

SECTIO

S E C T I O III.

De Projectione Sectionum Conicarum.

CONI Sectiones sunt tres illae Figurae Geometris notissimae, *Ellipsis*, *Parabola*, *Hyperbola*; quibus adjiciuntur nonnunquam *Circulus* et *Triangulum* rectilineum, seu potius *binae rectae* Superficie Conicae inscriptae. Nempe si planum secans fuerit Basi circulari Parallelum, aut huic *subcontrariè* positum, fit Sectio *circularis*; et si planum quod Sectionem efficiebat *Hyperbolicam* parallelòs moveatur, donec per Verticem transeat, Sectio erit rectilinea, id est *Hyperbola* cum *Asymptotis* coïnciderit. Si plana quae Sectiones efficiebant *Parabolicam* et *Ellipticam* similiter moveantur, degenerabit *Parabola* in *rectam*, *Ellipsis* in *Punctum*.

Quum itaque in omnimoda Circuli Projectione, Planum Projectionis *Conum* fecet, cujus *Vertex* est Polus Projectionis, Projectiones erunt ipsae illae Figurae modo memoratae. Nec minus constat, *Conum* ex Basi quâcunque *Ellipticâ*, *Parabolicâ* aut *Hyperbolicâ* (Sectionum oppositarum) oriundum, easdem praebere Sectiones; idque ob *reciprocas* Planorum Basis et Projectionis *vices*.

Circuli itaque Projectio, latius sumpta, totam doctrinam *Conicam* in se complectitur; proprietatesque omnes *Sectionum Conicarum* exinde deduci possunt et Demonstrationibus Geometricis firmari. Nobis Exempla quaedam, Speciminis loco, proposuisse satis erit, quibus methodi hujus Indoles atque Usus aliqua ex parte illustrentur.

Exempl. I. Fig. 9.

1. Sit recta *LS* *Linea Baseos*, *HN* *Linea Extremorum*, *CI* *Horizontalis*,

lis, A P T B Circulus per cujus centrum ducitur *Planum Verticale* secundum Diametrum A B ; fitque recta H N extra Circulum posita. Inveniatur Diametri A B Projectio a b ; ductisque a puncto H, in quo Linea Extremorum Plano Verticali occurrit, rectis H T, H T Circulum contingentibus in T, T, rectâque T T in t t projectâ, *Ellipsis* a p t b, Axi- bus a b, t t descripta erit Projectio Circuli dati A P T B.

Quum enim rectae A H, T H, T H concurrant ad Lineam Extremorum, quae Ellipsin contingunt in t, t, erunt Axi a b Parallelæ, id est, erit t t Axis ipsi a b conjugatus.

2. Positis $y = P M$ Ordinatae Circuli, $x =$ Abscissæ H M, $d =$ Diametro A B, $l =$ H B distantiae Circuli a Lineâ Extremorum, erit $y^2 = -x^2 + \overline{d + 2l} \times x - \overline{d + l} \times l$. Scriptisque, ut supra, $v = p m$ Ordinatae Projectæ, $z =$ Abscissæ C m, H G = a, C G = r, Aequatio Pro-

D 4

jectionis

jectionis erit $v^2 = -\frac{d+l \times l}{r^2} \times z^2 + \frac{d+2l \times a}{r} \times z - a^2$; ad *Ellipsin Specie datam*, modo detur Coefficiens termini $-z^2$. Axes enim a b , t t erunt ad invicem ut sunt r et $\sqrt{d+l \times l}$, five ut C G et tangens H T . Unde plura de hac Sectione proponi solita resolvas.

3. Ut si Conus (*Fig. 10.*) B T A Z Circulo B T A insistent, quem Planum Basi normale, secundum Diametrum, secat, Triangulum efficiens B A Z , Plano altero secandus sit, ut fiat Sectio *Ellipsis Speciei datae*; ductâ (si opus utrinque) Diametro A B ad hanc inflectatur a Vertice Z recta Z H ut sit rectangulum A H $\times$ H B ad H Z q , in ratione (F ad G) datâ, duplicata sc. illius quam habiturus est Axis Plano Verticali perpendicularis ad Axem alterum; ductâque rectâ C G ipsi H Z Parallelâ, si secundum hanc secetur Conus Plano quod

quod fit ad Planum Verticale rectum,
erit Sectio Speciei imperatae.

Demisso autem Perpendiculo Z I,
recta Z H inflectitur per Con-
structionem Aequationis quadraticae

$G - F \times x^2 + G \times A B + 2 B I \times F$
 $\times x = F \times Z B q.$ In quâ si prodie-
rint Radices x , seu B H, ejusdem
Signi, erunt Puncta H utraque ad
partes B ; si fuerint Aequales, *unica*
Z H ad *maximam* rationis $\frac{F}{G}$ quanti-
tatem pertinebit. Sin impossibiles e-
vaferint, ratio imperata fuit nimia.

Hujus vero maxima quantitas sta-
tim determinabitur, si, in Triangulo
Z B A ductâ quavis p s diametro B A
Parallelâ, quam bisecet t u in r, Tri-
angulum abscindens Isosceles Z t u ;
fiat ut rectangulum $u r \times r t$ ad $r s q$:
ita t u q (G) ad quartam (F) ; erit
enim ratio $\frac{F}{G}$ maxima quam usurpare
liceat. Vel etiam ductâ Z h ipsi t u
Parallelâ erat $\frac{F}{G}$ *maxima* $= \frac{A h \times h B}{Z h q}$.
In Cono recto maxima haec ratio est
aequa-

42 *Genesis Curvarum*

aequalitatis, quando sc. Planum secans fit Basi Parallelum.

4. Si fuerit C G vel Z H Contingenti H T aequalis, erit Projectio *Circulus*; est enim $\frac{d+l \times l}{r^2} = 1$. Et quum sint A H, H Z, H B continue Proportionales, est Angulus H A Z = Z b a (6. *el.* 6.) id est, Sectio secundum a b fit Basi A B *subcontraria*.

5. Haecenus posuimus Lineam Extremorum H N Circulum A B T non attingere. Nunc vero contingat in B, et propter $l=0$, Aequatio Projectionis erit $v' = \frac{da}{r} \times z - a^2$, ad Parabolam vertex a , Parametro $\frac{da}{r}$ descriptam: quae itaque datis d, r , sive, in *Fig.* 10. rectis A B, Z B vel Z A, Axi Projectionis a erit Proportionalis, et Magnitudinis cujusvis datae accipi potest.

6. Secet deinde Circulum ut in T k T, *Fig.* 9. isque projicietur in Sectiones oppositas, Verticibus a, b ,
Centro

Centro h, in quod Tangentium TH, concursus projicitur, ipse autem tangentes abeunt in Asymptotos. (*Supple Figuram.*) Et quum facta sit l Negativa, Aequatio Projectionem designans erit $v^2 = \frac{d-l \times l}{r^2} z^2 + \frac{d-2l \times a}{r} - a^2$. Ex quâ, non secus ac in Ellipfi factum est, *Hyperbolam* Speciei imperatae obtinebis.

7. Sit denique Curva exposita Sectio quaevis Conica quam in Circulum aut aliam Sectionem Speciei assignatae projicere velis. Sit v. g. in *Fig. 9, 10*, A B T *Ellipsis* cujus Axis A B = t , huic conjugatus = c , manentibus reliquis Symbolis, eritque Projectionis

$$\text{Aequatio } v^2 = - \frac{c^2 \times t \pm l \times \pm l}{t^2 r^2} z^2 + \frac{a c^2 \times t \pm 2l}{t^2 r} z - \frac{c^2 a^2}{t^2}; \text{ et Regula de inflexione rectae ZH hic etiam valebit.}$$

Invenietur sc. inclinatio Plani CG, in quo Projectio futura est *Ellipsis* aut *Hyperbola* Speciei datae, si capiatur

44 *Genesis Curvarum*

$\frac{1+l \times l}{r^2}$, five $\frac{AHB}{ZHq} = \frac{r^2}{c^2} \times \frac{F}{G}$; aut si
quaeratur *Circulus*, $\frac{AHB}{ZHq} = \frac{r^2}{c^2}$.

SCHOLIUM I.

Hinc obiter *Projectionis* illius *Stereographicae* ratio reddetur.

1. Sit enim Z punctum in Superficie *Sphaerae*, CG intersectio Plani Paralleli Circulo cujus Polus Z, cum Plano Verticali; B T A Circulus projiciendus, diametro BA, cujus Plano occurrat HZ ipsi CG Parallela in Puncto H, a quo duci intelligatur HT Circulum B T A contingens in T. Quoniam igitur sunt Puncta Z, T ad *Sphaerae* Superficiem, erunt contingentes ZH, TH Aequales, et *Projectio* in Plano CG, aut alio quovis huic Parallelo, *Circulus*. Per Art. 4. *hujus Exempli*.

2. Angulum BZA bifecet recta ZV, diametro BA occurrens in V, ipsi autem ba in v. Ea producta in Polum Circuli B T A incidet (26. *el.* 3.)
cujus

cujus itaque Projectio erit v. Ad
Punctum V erigatur Planum Plano
Projectionis Parallelum, five Basi B T A
Subcontrarium, quod Planum verticale
secet in V Q. Et si circa Z V tan-
quam Axem revolvi intelligatur Pla-
num, planum *Baseos* atque *illud* quod
per V Q ducitur perpetuo secans,
liquet Angulos quos efficiunt inter-
sectiones cum rectis V A, V Q fore
ubique aequales, planis nimirum ad
Axem revolutionis eodem prorsus
modo se habentibus. Anguli autem
in Plano V Q Angulis in v a aequan-
tur (16 & 10. *el.* 11.): Hi itaque
aequales erunt Angulis in Plano
B T A, aut in quovis huic Parallelo;
in illo speciatim quod Sphaeram tan-
git in Polo Circuli B T A. Ex quo
deducitur, *Angulos quosvis in Super-*
ficie Sphaericâ eosdem manere in Pro-
jectione: quod idem ex projectione
rectarum quae Sphaeram in puncto
quovis contingunt, facile elicias.

46 *Genesis Curvarum*

3. Puncta V, v, diametros A B, ba similiter dividunt; adeoque *recta quae per Polum projectum v ducitur Arcus abscindit Arcubus. expositis similes*, ad alternas tamen punctorum V, v, plagas: Ut si, *Fig. II*, sit a b Projectio Diametri A B, et in eâ Polum projectus v, et quaeratur Arcus cujusvis A C Projectio a c. Sectâ A B in V ut sit $AV : BV :: bv : av$, ductâque C V quae Arcum abscindat B K, huic similis a c erit Arcus quaesitus.

SCHOLIUM 2.

Nec difficilius Projectionem *Gnomonicam* sive *Horologicam* explicabis.

Assumto scilicet pro Polo Projectionum ipso Sphaerae Centro, Circuli omnes *maiores* projicientur in *Rectas*. Quarum quae *Meridianos*, sive Circulos *Horarios*, exhibent, ad Polum Mundi *projectum* convergent. *Meridianus* autem, qui est Plano Horologii

logii normalis, ipsum secabit in Lineâ *Substilarî*. Et si in ejusdem Meridiani Plano, erigatur a Centro (C) recta (C E quae sit *Axi* perpendicularis, Horologii Plano occurrens in E, et ab hoc puncto ducatur *Substilarî* normalis E Q, utrinque infinité producta, erit haec Projectio *Aequinoctialis* Circuli. Posita itaque C E Radio, recta E Q ejusdem Tangentem repraesentabit. Unde, in eadem E Q, Segmentum quod Arcui cuilibet *Aequinoctialis*, Magnitudine et Positione dato, debetur, semper abscindi poterit, adeoque Lineae Horarum *Indices* describi.

Circuli *minores* dati projicientur in *Coni Sectiones* datas, modo detur Positione Horologium. *Tropicorum* praecipue utilis est Projectio in delineandis Horologiis *Babylonicis* et *Italicis*, (verticaliter plerumque erectis) in quibus dies non a *Meridiano* inchoatur, sicut ubique alias feré gentium, sed ab *Horizonte*, id est ab

Ortu

48 *Genesis Curvarum*

Ortu vel Occasu Solis; Horasque indicat non Axis Umbra, ut in nostris, sed Styli Apex, qui pro Sphaerae centro habetur.

L E M M A.

Sole, in diversis anni tempestatibus, ad tria quaelibet Horizontis puncta exorto, quae sint L, M, N, post horam (aut datum aliquod Temporis Spatium) fuerit ipsius Centrum in punctis l, m, n, dico esse haec puncta in Circulo Sphaerae MAXIMO.

Fingamus enim, pro terno Solis Ortu, tres Soles (aut potius *Fixas*) simul exortos esse in punctis L, M, N; et quum in Circulo maximo (*Horizonte*) fuisse ponantur, in eodem permansisse necesse est; nam sunt puncta l, m, n, ipsa L, M, N, per Motum diurnum delata.

Eâdem ratione, quotlibet ejusmodi Puncta, l, m, n, o, p, &c. sunt in eodem Circulo maximo. Qui si in *Rectam* Gnomonicè projiciatur, erit
haec

Fig. 9.

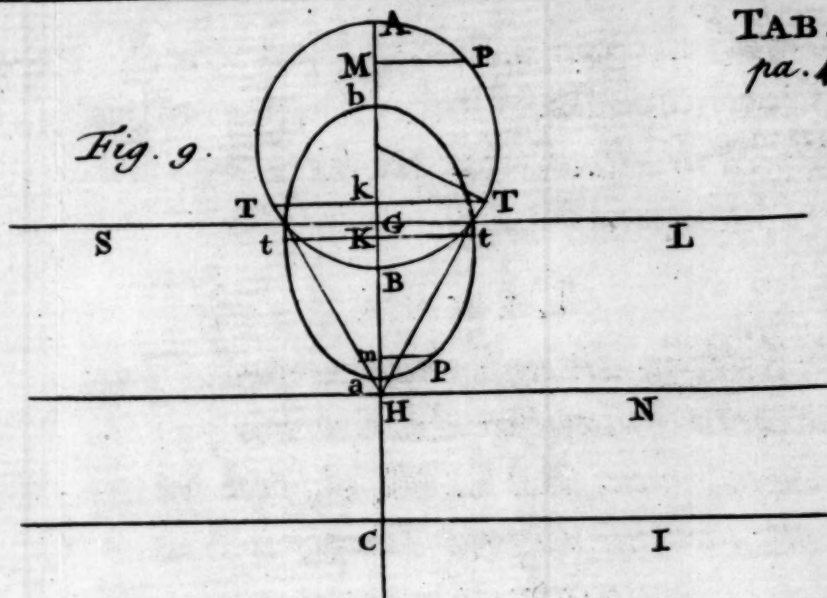


Fig. 10.

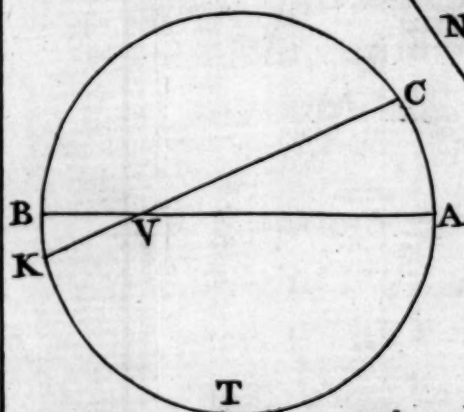
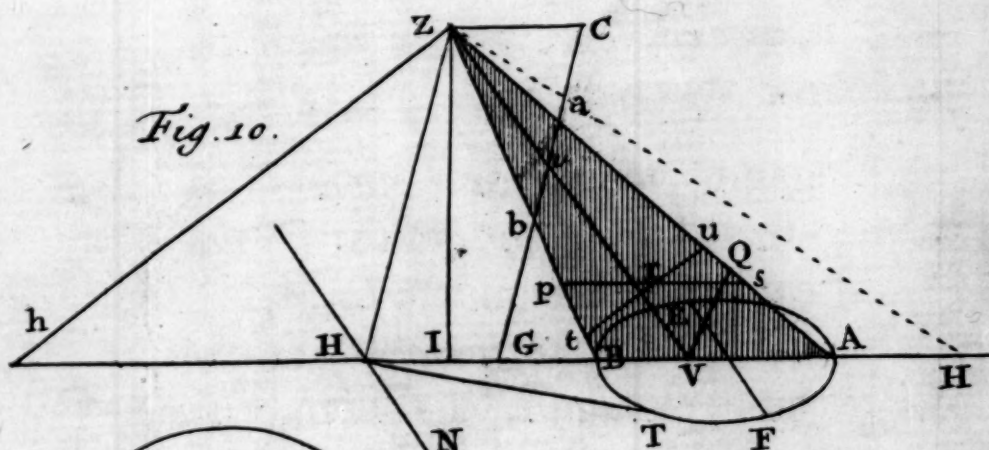
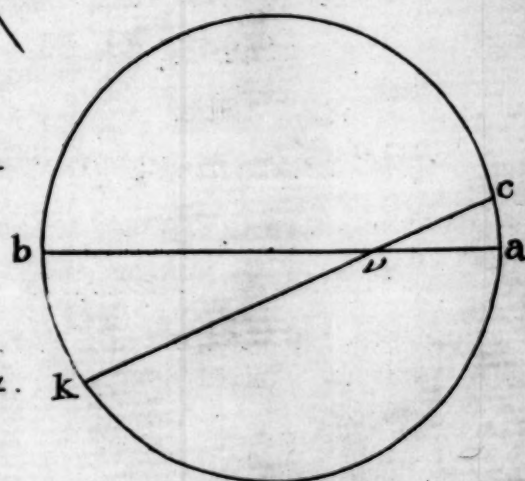


Fig. 11.



haec *Linea horaria* qua tempus datum ab *ortu* vel *occasu* Solis ritè definitur.

In hujusmodi itaque Horologiis, projectis *Polo* (P), *Aequinoctiali*, *Horizonte* et *Tropico*; notetur Punctum (T) in quo *Tropicus Horizontem* secat, Occasum versus in Horologio *Babylonico*, ad Orientem in *Italicis*: Sunt enim haec Puncta in quae projicitur *Solis* Orientis et Occidui Centrum dum in *Solstitiis* versatur, ex quibus utique Horas subinde dinumeres. *Meridiani* autem per T transcurrentis Projectio, id est recta P T, *Aequinoctiali* E Q, occurrat in I. Exinde initio sumpto, abscindantur *Aequinoctialis* Segmenta singulis Horis debita, quorum Termini sint in Punctis A, B, C, &c; et per eadem A, B, C, &c. rectae a Polo exeuntes, *Tropico* occurrant, singulae in binis Punctis A, a; B, b; C, c; &c. Sit etiam H Punctum illud in quo *Aequinoctialis* et *Horizon* se mutuo secant:

E

Et

50 *Genesis Curvarum*

Et si a Puncto H abscindantur ad easdem plagas, Segmenta Horaria in Punctis α , β , γ , &c. terminata, junctis A α , $\alpha\alpha$; B β , $\beta\beta$; C γ , $\gamma\gamma$; &c. erecto utrinque Stylo, deletisque Superfluis, perficietur Horologium.

Illud tantum monere liceat, quod si fuerat Intersectio a in *Hyperbolae* Sectione opposita illi in qua sunt Intersectiones T, A, recta $\alpha\alpha$ alteri Horologii faciei inscribenda sit. *Tropici*que Projectione nos prae ceteris uti, quod per ipsam Lineae horariae circumscribantur*.

Projectionem Sphaerae *Orthographicam* ut perfacilem omitto.

Exempl. II.

1. Quando Polus Projectionis Z, extra Planum Verticale per Axem, locatur (quem quoque Casum in *Fig. 10.* exhiberi ponimus,) si detur Positione, Planum Projectionis dabitur et Linea Extremorum H N. Huic
Parallela

* *Supple Figuras.*

Parallela Diameter EF, sit c, ipsi autem conjugata, t; ceterisque ritu praecedentium peractis orietur aequatio ejusdem formae Projectionem designans. Datur enim Angulus Ordinarum per *Corol. 8. Sect. I.* Idem fieri poterat ducendo Planum cui recta HN sit normalis, et cujus Intersectiones cum Planis datis pro Lineis abscissarum usurpentur.

2. At si *invenienda sit ea Plani Secantis Positio quae Sectionem efficiat Specie datam*, incidimus in Problema illud *Solidum a Cartesio olim aliisque variè agitatum*; inter quos est *Illustr. Hospitalius, Sect. Conic. Lib. 10. Prop. 10.*

Nunc vero in inflexione rectae ZH, haec duo requiruntur: Primum ut ductâ Diametro HBA, sit rectangulum AHB ad ZHq in ratione data; alterum, ut ductâ HN Ordinatâ ad Diametrum AB Parallelâ, sit Angulus ZHN rectus: vel, si Basis sit Parabola, Angulus ZHN

52 *Genesis Curvarum*

fit rectus ; et Rectangulum sub HB et Parametro diametri HB fit in ratione data ad HZq ; in ratione quidem Aequalitatis si Sectio imperata est *Circulus*.

3. Casus Posterioris Solutionem adjiciam ; simpliciores nempe, reliquosque in se complectentis ; quum Basis quaelibet in *Parabolam* facile convertatur, *Circulus* autem in Sectionem specie datam, per *Exempl. I. Fig. 12.*

A Puncto dato Z in Parabolae planum demittatur Perpendicularum ZI , ipsi occurrens in Puncto I , a quo ad Axem fiat normalis IR : Et per H Punctum quaesitum, si fit Parabolae diameter HB , quae rectae IR occurrat in M , Curvae autem in B , ad B duci intelligatur contingens BX , et Ordinata ad Axem BL ; et per H recta HN ipsi BX Parallela Axem secet in N . Junctis denique ZH , ZN , ZR , fit NK ipsi HM normalis.

Tum

Tum vero si fuerit p Parameter ad Axem, erit $p + 2 L X$ five $p + 2 H K$ Parameter ad Diametrum quaesitam $H B$, et $B X q$ five $H N q = \frac{1}{2} H K \times p + 2 H K$; additisque (ex conditione Problematis) aequalibus $Z H q$ et rectangulo sub $H B$, vel $N X$, et Parametro $p + 2 H K$, erit rectangulum $N X + \frac{1}{2} H K \times p + 2 H K$, id est rectangulum $R V - K M \times p + 2 H K = Z H q + H N q =$ (propter Angulos $Z H N$, $Z R N$ rectos) $= Z N q = Z R q + K M q$.

Est autem $M R q (= H N q - H K q) = \frac{1}{2} H K \times p$, et $I M = I R - \sqrt{\frac{1}{2} H K \times p}$, atque $H K : M R :: I M : H M$. Unde erit $K M (= H M - H K) = \frac{I R \times \sqrt{\frac{1}{2} H K \times p} - \frac{1}{2} H K \times p}{H K} - H K$. Aequetur hic rectae $K M$ valor illi qui prodit ex Aequatione quadraticâ $Z R q + K M q = R V - K M \times p + 2 H K$, et scriptis pro incognitâ $H K$, x , pro datis

54 *Genesis Curvarum*

$p \times R V + \frac{1}{4} p^2 = Z R q$, quadrato
 $Q Q$, fiet $x^3 + p + 2 R V \times x^2 +$
 $Q Q \times x - \frac{1}{4} p \times I R q = 0$. quae
 cum Aequatione *D. Hospitalii* paullo
 aliter inventâ plane congruit.

Datâ autem, per Constructionem
 Aequationis Cubicae, rectâ $H K (=$
 $2 L V)$ datur positione Diameter $B H$.
 Datur etiam per Aequationem Qua-
 draticam $K M$, five $N R$, et punctum
 N , a quo, $N H$, contingenti $B X$ pa-
 rallela et Diametro $B H$ occurrens in
 H , erit Linea Extremorum, et $Z H$
 radius Projectionis quaesitus. Rec-
 tae autem $K M$ valor negativus ad
 alteras partes Puncti R positus, alte-
 ram dabit Lineam Extremorum ($h n$)
 quae Proposito satisfaciet.

Exempl. III. Fig. 13.

*Conisectionem per data quinque
 Puncta projicere, quorum tria non
 sunt in eâdem rectâ.*

Sint

Sint Puncta data A, B, C, D, E ;
 per quorum bis duo A, B ; C, E ;
 quae ducuntur rectae concurrant in
 M ; at B C, A D in N ; et fiat recta
 N M *Linea Extremorum* : aut si fu-
 erint A B, C E Parallelae, accipiatur
 Linea Extremorum his Parallela quae
 per N ducitur. Assumtis deinde qui-
 busvis L S, C I, pro *Linea Baseos* et
Horizontali, quoniam sunt M, N
 Puncta ad Lineam Extremorum, e-
 runt ipsarum A B, C E Projectiones
 a b, c e, Parallelae, ut et b c, a d ;
 et quae has bisecant Diametri con-
 current in Centro Projectae Curvae k.
 Dato autem Centro k, et ordinatim
 applicatis a b, c e ; vel c b, a d, da-
 tur Consectio. Vices alternent rec-
 tae M N, C I, et Consectio a b c d e
 projicietur in A B C D E quaesitam.
 Q. E. F.

SCHOLIUM.

Quod si coisse censeantur duo Puncta B, C, Problema in hoc aliud convertetur. “*Consectionem per tria puncta data describere, quae in dato puncto tangat rectam positione datam:*” aut, coeuntibus et binis aliis A, D, in istud, “*Consectionem describere quae per datum punctum transeat et binas positione datas in datis punctis contingat.*”

Sic etiam Problemata hujusmodi aliqua resolvi poterunt, quae vix aliter tractare liceret: qualia sunt illa *Newtoni, Prop. XXV. XXVI. Lib. I. Princip.* ipsâ hac Methodo soluta. Jam enim animadverterit Lector, *Transmutationem Curvarum* in *Lemmate XXII. Princip.* traditam ipsam esse *Curvarum Projectionem* de quâ nunc agitur, generaliter admodum, et sub-obscuré, descriptam. Haec ita se habere ex *Locis modo citatis* abunde liquet; ipsum

ipsum vero *Lemma* huc transferre non pigebit ; quo etiam pateat quanti methodum hanc fecerit summus ille Vir, qui omnia ad *Geometriam* pertinentia animo percepisse et secum antè peregrisse videtur.

Philos. Nat. Princip. Math. Lib. I.

Lemma XXII.

“ Transmutanda sit figura quaevis
 “ H G I, *Fig. 14.* ducantur pro lu-
 “ bitu rectae duae Parallelae A O,
 “ B L, tertiam quamvis positione da-
 “ tam A B secantes in A & B, et a fi-
 “ gurae puncto quovis G ad rectam
 “ A B ducatur quaevis G D, ipsi O A
 “ parallela. Deinde a Puncto aliquo
 “ O, in Linea O A dato, ad punctum
 “ D ducatur recta O D, ipsi B L oc-
 “ currens in d, et a Puncto occurfus
 “ erigatur recta d g datum quemvis
 “ Angulum cum recta B L continens,
 “ atque eam habens rationem ad O d
 “ quam habet D G ad O D ; et erit
 “ g Punctum in Figura nova h g i
 “ Puncto

58 *Genesis Curvarum*

" Puncto G respondens. Eadem ra-
 " tione puncta singula Figuræ pri-
 " mæ dabunt puncta totidem Figu-
 " ræ novæ. Concipe igitur Punc-
 " tum G motu continuo percurrere
 " puncta omnia Figuræ primæ, et
 " Punctum g motu itidem continuo
 " percurrent puncta omnia figuræ no-
 " væ et eandem describet. Distinc-
 " tionis gratia nominemus D G ordi-
 " natam primam, d g ordinatam no-
 " vam; A D abscissam primam, a d
 " abscissam novam; O Polum, O D
 " Radium abscindentem, O A Ra-
 " dium ordinatum primum, et O a
 " (quo Parallelogrammum O A B a
 " completur) Radium ordinatum no-
 " vum.

" Dico jam quod, si Punctum G
 " tangit rectam lineam positione da-
 " tam, Punctum g tanget etiam li-
 " neam rectam positione datam. Si
 " Punctum G tangit Conicam Sec-
 " tionem, Punctum g tanget etiam
 " Conicam Sectionem. Conicis Sec-
 " tionibus

“ tionibus hic Circulum annumero.
 “ Porro si Punctum G tangit Lineam
 “ tertii ordinis analytici, Punctum g
 “ tanget Lineam tertii itidem ordi-
 “ nis ; et sic de curvis lineis superio-
 “ rum ordinum. Lineae duae erunt
 “ ejusdem semper ordinis analytici
 “ quas Puncta G, g tangunt. Ete-
 “ nim ut est a d ad O A ita sunt O d
 “ ad O D, d g ad D G, et A B ad A D ;
 “ ideoque A D aequalis est $\frac{O A \times A B}{a d}$,
 “ et D G aequalis est $\frac{O A \times d g}{a d}$. Jam
 “ si Punctum G tangit rectam lineam,
 “ atque ideo in Aequatione quavis,
 “ qua relatio inter abscissam A D et
 “ ordinatam D G habetur, indetermi-
 “ natae illae A D et D G ad unicam
 “ tantum dimensionem ascendunt,
 “ scribendo in hac Aequatione $\frac{O A \times A B}{a d}$
 “ pro A D, et $\frac{O A \times d g}{a d}$ pro D G, produ-
 “ cetur Aequatio nova, in qua Ab-
 “ scissa nova a d et Ordinata nova d g
 “ ad unicam tantum dimensionem
 “ ascendent, atque ideo quae desig-
 “ nat

60 *Genesis Curvarum*

“ nat Lineam rectam. Sin A D et
 “ D G, vel earum alterutra, ascende-
 “ bant ad duas dimensiones in Aequa-
 “ tione prima, ascendent itidem a d
 “ et d g ad duas in Aequatione se-
 “ cunda. Et sic de tribus vel pluri-
 “ bus dimensionibus. Indetermina-
 “ tae a d, d g in Aequatione secunda,
 “ et A D, D G in prima ascendent
 “ semper ad eundem dimensionum
 “ numerum, et propterea Lineae,
 “ quas Puncta G, g tangunt, sunt
 “ ejusdem ordinis analytici.

“ Dico praeterea, quod si recta ali-
 “ qua tangat Lineam Curvam in Fi-
 “ gura prima; haec recta eodem
 “ modo cum Curva in Figuram no-
 “ vam translata tanget lineam illam
 “ curvam in figura nova; et contra.
 “ Nam si curvae puncta quaevis duo
 “ accedunt ad invicem et coeunt in
 “ figura prima, Puncta eadem trans-
 “ lata accedent ad invicem et coibunt
 “ in figura nova; atque ideo rectae,
 “ quibus haec Puncta junguntur, si-
 “ mul

“ mul evadent curvarum tangentes in
“ figura utraque.

“ Componi possent harum asser-
“ tionum demonstrationes more ma-
“ gis geometrico. Sed brevitati con-
“ sulo.

“ Igitur si figura rectilinea in ali-
“ am transmutanda est, sufficit rec-
“ tarum, a quibus conflatur, intersec-
“ tiones transferre, et per easdem in
“ figura nova lineas rectas ducere.

“ Sin curvilineam transmutare oportet,
“ transferenda sunt puncta, tan-
“ gentes, et aliae rectae, quarum ope
“ curva linea definitur. Inservit au-

“ tem hoc Lemma solutioni diffici-
“ liorum Problematum, transmutan-
“ do figuras propositas in simpliciores.

“ Nam rectae quaevis convergentes
“ transmutantur in parallelas, adhiben-

“ do pro radio ordinato primo lineam
“ quamvis rectam, quae per concur-

“ sum convergentium transit; idque
“ quia concursus ille hoc pacto abit
“ in infinitum; lineae autem Paral-

“ lelae

62 *Genesis Curvarum*

“lelae sunt, quae nusquam concur-
 “runt. Postquam autem Problema
 “solvitur in figura nova ; si per
 “inversas operationes transmutetur
 “haec figura in figuram primam,
 “habebitur solutio quaesita.

“Utile est etiam hoc Lemma in
 “Solutione solidorum Problematum.
 “Nam quoties duae Sectiones Coni-
 “cae obvenerint, quarum intersec-
 “tione Problema solvi potest, trans-
 “mutare licet earum alterutram, si
 “Hyperbola sit vel Parabola, in El-
 “lipsin: deinde Ellipsis facile muta-
 “tur in Circulum. Recta item et
 “Sectio Conica, in constructione
 “planorum Problematum, vertuntur
 “in rectam et circulum.”

*Haec Newtonus, quibus ubique
 feré gemina sunt quae in Sect. II. ha-
 bentur. Referunt scilicet, in Figura
 Lemmatis, Punctum O Polum, a
 Centrum Projectionis, a B (= A O)
 Radium, A Punctum in quo Abscissa*

BI

B I secat *Lineam Extremorum*: et si Angulus datus $g d i$ is fit qui ex data Plani Verticalis (*secundarii*) O A B a Positione consequitur, erit Curva $g h i$ Projectio datae G H I. Quod enim *Neutonus* Curvam utramque in Plano O A B a descriptam ponat, id quidem nihil mutat: quamvis *Transmutationem* hanc sub verae *Projectionis* specie facilius plerumque contempleris.

Exempl. IV. LEMMA. *Fig. 15.*

Conisectionem projicere ut ejusdem data quaevis Diameter fiat Axis Projectionis.

Sit Polus Z, datae diametro V T, Conjugata P Q: A puncto Z demittatur in planum Sectionis perpendiculum Z I, ipsi occurrens in I, a quo fit I R conjugatae normalis, quae Diametrum V T secet in H; et ductâ H N conjugatae P Q parallelâ, erit haec *Linea Extremorum* Projectionis quaesitae. Constat etiam

64 *Genesis Curvarum*

tiam " rectam quamlibet (ut vst *)
 " ad Confectionem in v, t , punctis
 " terminatam projici posse in Axem."
 Tangentes enim in v, t , coeant in n ,
 et assumptâ *Lineâ Extremorum* quâ-
 vis per n ductâ, transibit vst in Dia-
 metrum VsT ; quam in Axem de-
 nuo projicias.

PROBLEMA.

*Data Telluris Orbitâ Planetariam
 invenire.*

Habeantur *quinque* Planetæ Loca,
 dum Centrum Telluris idem Orbitæ
 suæ punctum teneret, observata;
 quæ in Planum aliquod projecta sint
 a, b, c, d, e ; Consectio quæ per
 hæc describitur $vqtp$, et in eâ
 punctum s , centrum *Solis* projec-
 tum. Et

1°. Dato positione Orbitæ Planeta-
 riæ *Axe majore*, hujusque Projectione
 vst , Sectio in cujus Axem projicitur
 ipsa vst , et cujus Planum per cen-
 trum *Solis* ducitur, erit Orbita quæ-
 sita.

2°.

* *Supple Fig.*

2^o. Sin, quod verius, Apſidum positio non detur, directa Problemat^{is} Solutio a simplicitate hujus methodi ita recedet, ut Approximatio commoda magis videatur. Projice itaque (*per Exemp. II.*) ipsam $vqtp$ in Circulum, in quo sit K Centrum, puncti S projectio S^{*}; diametri autem per S, K, ductae Projectio in plano assumpto pro Axis Projectione vst usurpetur; ipsâque in Axem projectâ, notetur *Error*, sive distantia projectionis puncti s ab Ellipseos *Foco*: rectae deinde vst positione tantillum mutatâ, opereque iterato, ut Error iste continuo minuatur, ex Errorum, et Angulorum, *differentiis* veram rectae vst positionem obtinebis. Quum enim Planetarum Orbitae sint propè circulares, recta quae Verticem Z et centrum K conjungit, incidet ferè in centrum Ellipseos; et diametri per S, K, projectio ab Axis projectione ita parum distabit, ut ex-

F inde

* *Supple Fig.*

66 *Genesis Curvarum*

inde Approximationem ritè auspice-
ris. Vel,

3^o. Compendii causâ, eam Axis
positionem, sed postea corrigendam,
assumas, quae Astronomis jam pro
verâ habetur.

Exempl. V.

*Solidi Rotundi, Curvae cujuscvis
circa Axem rotatione geniti, Imagi-
nem describere. Tab. VI. Fig. Z.*

Liquet ejusmodi Solidi Superficiem
tractari posse tanquam ex innumeris
Circulis conflata, quorum Diametri
sunt Curvae *Genitricis* Ordinatae
rectangulae. Axe itaque in Partes
fatis minutas distributo, Circuli cor-
respondentes projecti, Solidi Super-
ficiem totam exhibebunt. Restat
modò ut refecetur Pars illa quae Par-
tium contiguarum interpositu occul-
tatur ; quod quidem sic ferè praestari
poterit.

Posito quod sit $A T t v$ Circulus re-
volutione Ordinatae $A T$ Axi $A P$ in
Puncto

Puncto A infistentis genitus ; O Oculus, seu Polus Projectionis ; P Punctum in quo T P contingens Curvae Genetricis ad Ordinatum A T perti-
nens Axem fecat : Jungatur P O, quae, (si opus producta) Plano Circuli T t v occurrat in Q. Et exinde ductis Q T, Q t, quae Circulum tangent in T, t, erit Arcus T t visibilis, reliquus T v t post Solidum latebit. Plana etenim P O Q T, P O Q t, contingunt tum Curvam Genetricem tum Circulum in T, t, adeoque et Superficiaei particulas ibidem genitas.

Diversi oriuntur Problematis Casus, pro diversâ Puncti O positione : quod si cum ipso P coincidat, fiet Circulus T t v utrinque visibilis. Si ad alteras Partes, ut in o, rectâ processerit, erit Arcus T v t jam conspicuus, ipse autem T t occultabitur. Ponatur Oculus in ω , ut sit ω P Diametro alicui Circuli T t v Parallela, eritque Arcus T t Semicirculus ; et positâ insuper ω P infinitâ ; evadent omnes

68 *Genesis Curvarum*

T t Semicirculi, et Projectio Figurae Genetrici similis et aequalis. Fieri etiam potest ut Punctum Q non cadat extra Circulum T t v, unde erit Punctorum T, t, determinatio impossibilis. Id est Circuli peripheria vel tota conspicietur vel tota occultabitur.

Occurrit et alia partium Interpositio *non-contiguarum*, quoties Figura Genetrix variè ad Axem inflectitur, vel curvaturas forte habet discontinuas. Ut in Columnarum Basibus *Torum* videmus non tantum sui ipsius sed et reliquae Baseos partem aliquam obumbrare. Atqui hujusmodi Casus speciatim tractari non postulant. Inventis enim ubique, ut supra praescribitur, punctis pluribus T, t, iisdemque in Planum datum projectis, Curvae per Projectiones istas descriptae partes visibiles determinabunt.

Atque haec de Solidorum Projectione dicta sunt: Neque enim Doctrinam illam de *Curvis dupliciter curvatis*,

curvatis, parum certé proficuam, hic in Subsídium vocabimus ; quum, ex defectu descriptionis Organicae, res ad punctorum inventionem tandem reditura esset. De solidis autem minus regularibus, vix quidquam utilius tradi potest : ejusmodi saltem figurae quae apud Sculptores, Architectos, aliosque in pretio sunt et praecipué laudantur, mathematicas rationes prope fastidiunt ; certos modo limites extra quos evagari vix liceat rité signaverit Geometra, cetera Artificum ingenio et solertiae prudens relinquet.

SCHOLIUM.

Projectionem Methodus Problematis resolvendis non apta magis invenietur quam Theorematum ac Demonstrationum ferax. Hinc enim Curvae alicujus Proprietates notae, ad Curvae cognatae proprietates ita facile transferuntur, ut ea demonstrandi Ratio, rité adhibita, maximé genu-

ina cenferi poffet; quae fcilicet menti, tanquam invitae, affenfum non extorqueat, fed, ipfam rei naturam explicando, alliciat. Nec dubitandum quin, Doctrinâ hâc ulterius promotâ, plures Figuram Affectiones adhuc latentes detegi queant, ipfaque Geometria Elementaris incrementum acceptura fit haud contemnendum.

Sic angurari liceat vel ex iis quae, de Sectionibus Coni, inventis *Hospitalianis* obiter adjecit Celeberrimus *D. Mac-Laurin. Fluxion. Art. 609*, et feq. Mihi etiam, haec verfanti, plura fefe offerebant; quorum, quia fingula perfequi non vacat, Spicilegium quoddam, in *Figuram 16.* congestum, exhibetur.

I. Si e Circuli dati Centro *K*, in rectam pofitione datam *P Q*, demittatur normalis *K G*, et a rectae *P Q* Puncto quovis *P* Circulum contingant rectae *P A*, *P B*, *juncta A B* ipsam *K G* fecabit in dato puncto *C*.

Ductis

Ductis enim PK , KB , quarum illa subtenſae AB occurrat in F , erit Semidiametri datae quadratum KBq Rectangulo PKF aequale; cui etiam, propter Triangula KPG , KCF , ſimilia, aequatur Rectangulum GKC ; datur autem (*Hyp.*) et KG , adeoque KC et Punctum C . Haec a D. *Mac-Laurin*, ubi ſupra, demonſtrantur.

2. Junctâ PC quae Circulo occurrat in D , E , productâque ſubtenſâ AB ut rectam PQ ſecet in Q ; ad idem Punctum convergent DQ , EQ , Circulum contingentes in D , E .

3. Ductâ KQ , eſt Angulus KQC Angulo KPC aequalis.

4. Inſcriptae $ADB E$ Latera oppoſita AD , BE , vel AE , DB , producta, ad Punctum R , vel r , in datâ PQ ſito, convergent.

5. Contingentes ſic ductae Quadrilaterum conſtituant $HILM$; et

erunt Puncta H, C, L, R, in eadem rectâ, ut et Puncta M, C, I, r.

6. Rectangula sub Lateribus oppositis Trapezii inscripti sibi mutuo aequantur: $AD \times EB = AE \times DB$. (Adeoque Rectangulum $AB \times DE$ est utriusvis duplum.) Nam est $AD : AE :: DP : (PA =) PB :: DB : BE$.

7. Propter Triangula PGC, KGQ Similia est Rectangulum PGQ dato Rectangulo KGC aequale, vel etiam rectae Gn Circulum a Puncto G contingentis Quadrato.

8. Productâ utrinque Cn ut Circulo rursus occurrat in m , Lateribus Figuræ circumscriptæ in a, b, d, e ; inscriptæ autem in $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$, Punctis: Erit $Ca = Cb, Cd = Ce; C\alpha = C\beta, C\delta = C\epsilon; Aa = Bb, Ee = Dd$.

9. Quoniam est Cn tam inter KC, CG quam inter AC, CB media Proportionalis, sunt Puncta $A, K,$
 B, G

B, G ad Peripheriam Circuli, ut et
Puncta E, K, D, G.

10. *Rectae PQ Quadratum aequale
est quadratis e contingentibus P B,
Q D, simul sumptis.*

11. A Puncto G ad contactum
aliquem, ut B ductâ G B erunt Tri-
angula P G B, P B Q Similia, adeo-
que Ratio ipsius P G ad P Q Ratio-
nis P B ad P Q duplicata.

12. Secet ductarum aliqua, ut G D
rectam C m in t, eruntque C t, C m,
C d continue Proportionales, &c.

SECTIO

S E C T I O IV.

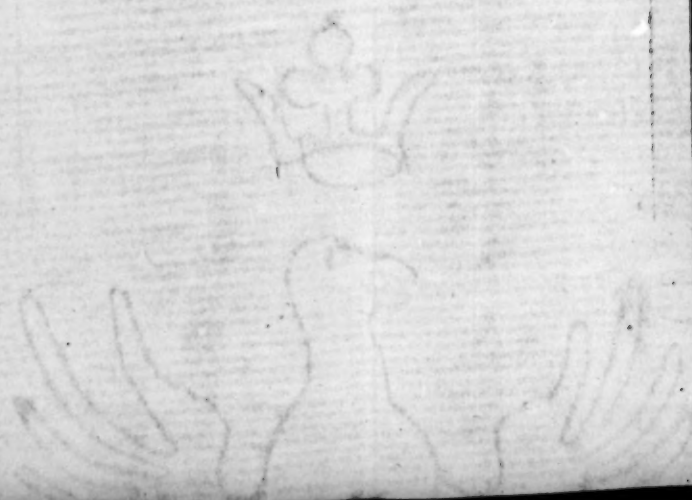
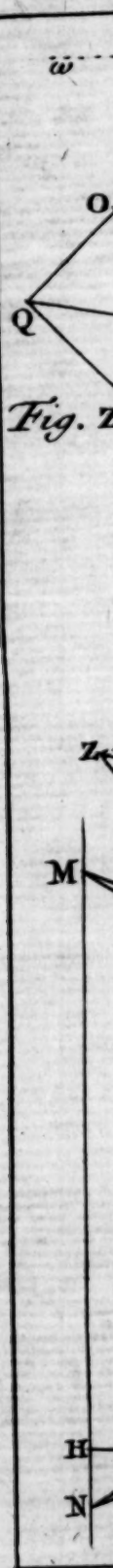
Genesis Linearum tertii Ordinis ex Umbris quinque Parabolarum divergentium.**Classis Prima.*

CURVAS continens quae generantur ex Parabola divergente cum Ovali conjugata, quam designat Aequatio $y' = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ubi posita $y = 0$, tres Abscissae x valores sunt reales et inaequales. *Neutono Spec. 67. Fig. 70, 71 †.*

Pars

* Si in Planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbrae figurarum projiciantur, Umbrae Sectionum Conicarum semper erunt Sectiones Conicae, eae Curvarum secundi Generis semper erunt Curvae secundi Generis, eae Curvarum tertii Generis semper erunt Curvae tertii Generis, et sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat Sectiones omnes Conicas, sic Parabolae quinque divergentes umbris suis generant et exhibent alias omnes secundi Generis Curvas, et sic Curvae quaedam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt quae alias omnes eorundem Generum Curvas umbris suis a puncto lucido in Planum projectis formabunt. *Neut. Enumerat. sub finem.*

† Species et Figurae ad quas refertur eae sunt Enumerationis a D. Jones, editae 1711. qui Tractatus haec legenti praesto esse supponitur; ut et V. Cl. Jac. Sterling Lineae tertii Ordinis, Oxon. 1717.



TAB. VI.
pa. 74.

Fig. 12.

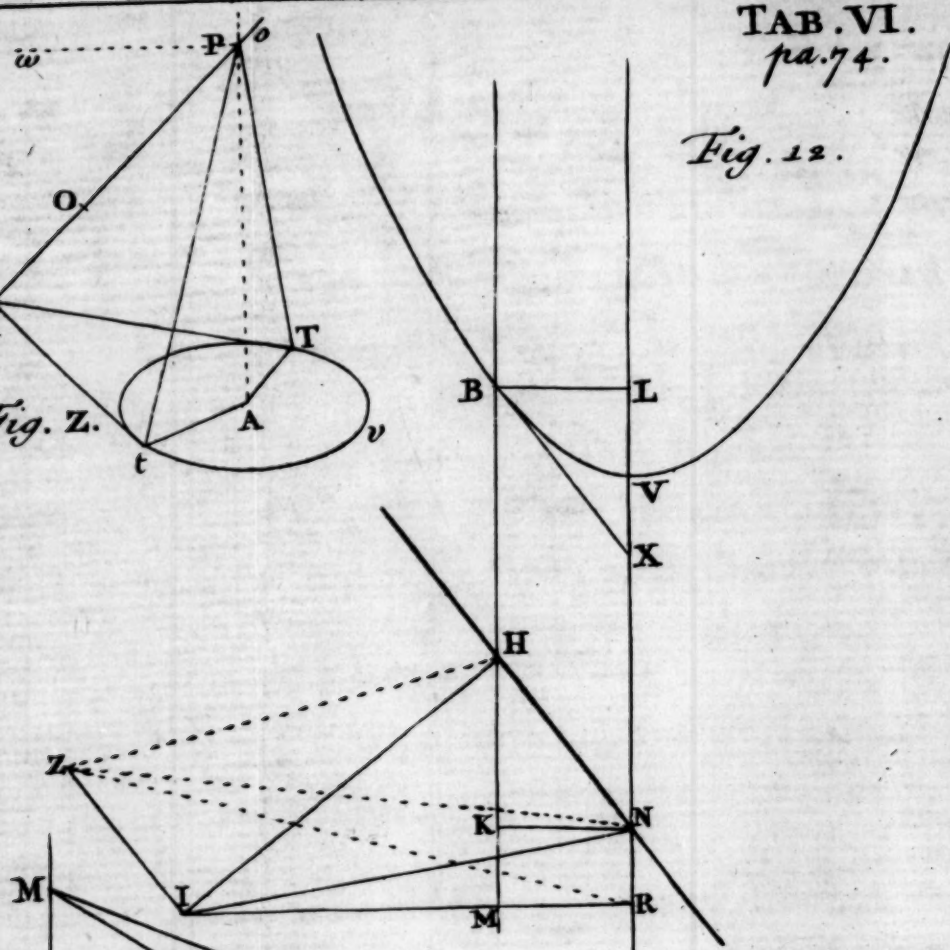
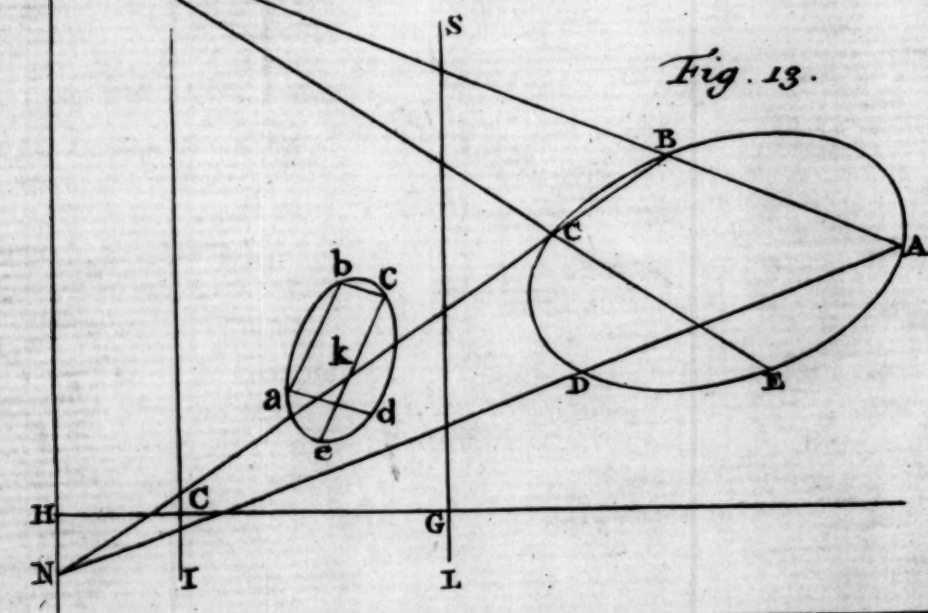


Fig. 13.

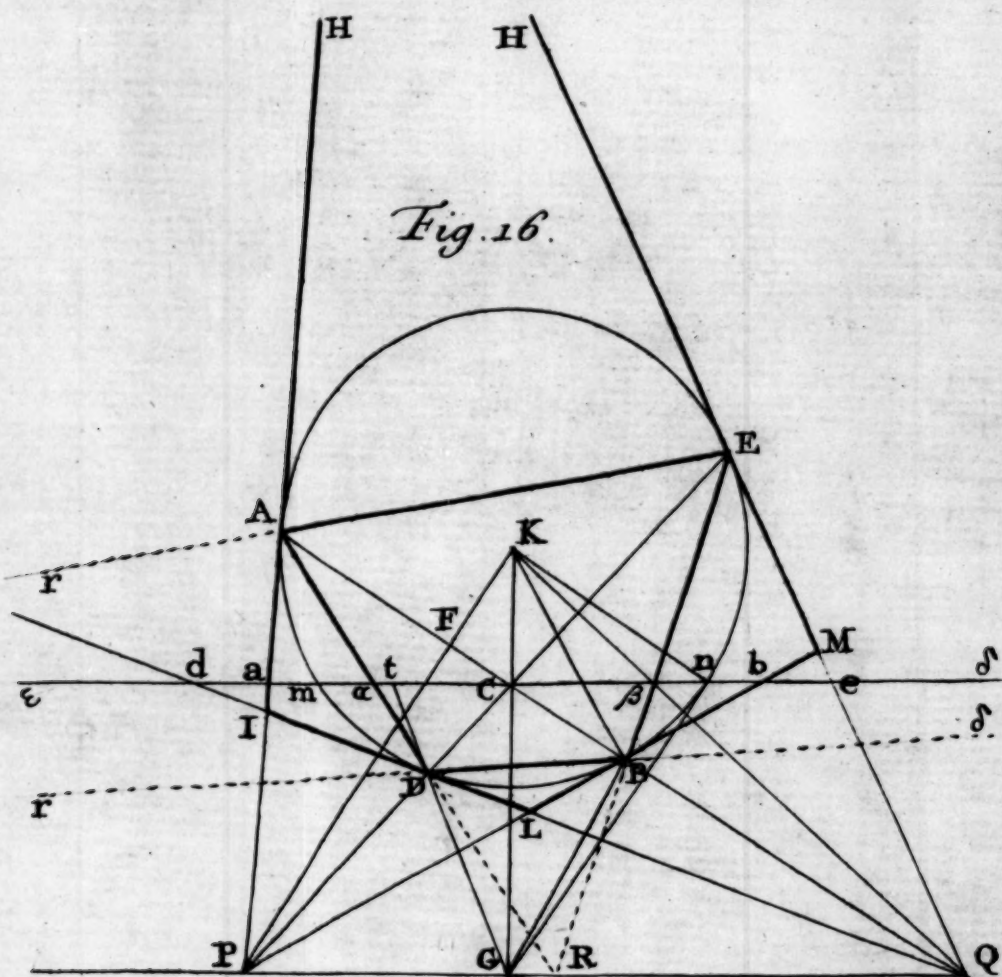
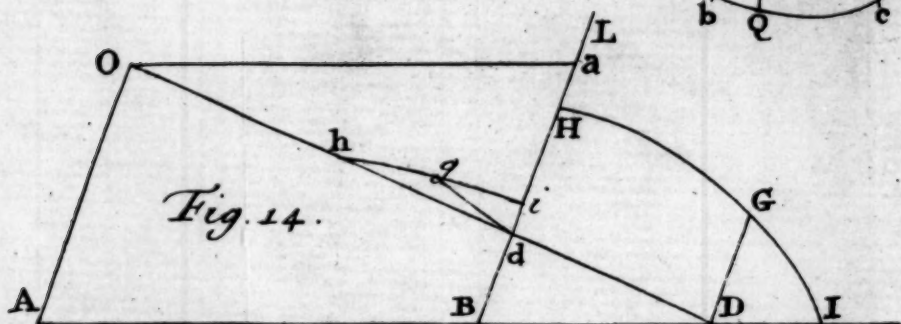
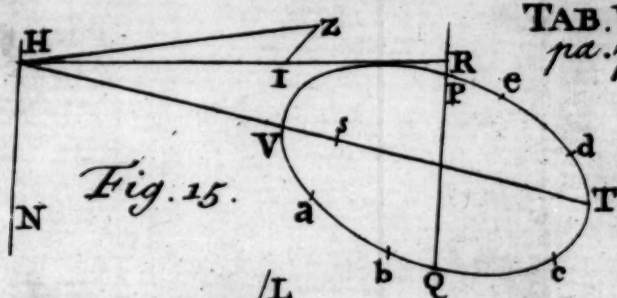


A

r

e

r



Pars I. Fig. A A.

Ubi *Linea Extremorum*, in qua Planum per Punctum immobile ductum, Plano Projectionis parallelum, Figuræ expositæ Planum fecat, est *Axi Figuræ normalis*, aut saltem *Ordinatis* (y) *Parallela*. Hanc vero *Lineam*, *Litera* (L) brevitatæ causâ, posthac notabit.

I.

Secet L Axem in A, extra Curvam. Et Parabola projicietur in *Hyperbolam Conchoidalem*, cui *Asymptotos* est ipsa *Linea Horizontalis*, in quam utique projicitur *Ordinata* infinite distans. *Ovalis* autem abit in *Ovalem* ad *Verticem Conchoidalis* sitam. Quæ est *Species* 39, *Fig.* 45.

II.

Tangat *Ovalem* in B; et *Ovali* in *Parabolam* conversâ, oriatur *Species* 55. *Fig.* 59.

III.

III.

Secet Axem in C, Ovalet in Punctis T T; et ductis ad T, T tangentibus quae concurrant ad Partes A, harum Projectiones erunt binae Asymptoti ad *Hyperbolas* ex Ovali oriundas. Asymptoton vero Concurfus supra Lineam Horizontalem, Asymptoton tertiam, cadet. Unde fiet *Species* 21. *Fig.* 27.

IV.

Secet Axem in D, ut quae Ovalem in T, T contingunt evadant Parallelae; ipsae in binas Asymptotos etiamnum projicientur, sed quarum concurfus incidit in tertiam Asymptoton; *Speciem* efficiens 31. *Fig.* 37.

V.

Sit Intersectio in E Puncto, ut Tangentes concurrant ad alteras partes, et, in Projectione, Triangulum ab Asymptotis formatum cadet infra
Asymp-

Asymptoton *Conchoidalis*. Quae est
Species 20. *Fig.* 26.

VI.

Tangat L Ovalem in F; ea in *Parabolam* convertetur, cujus Vertex supra *Conchoidalis* Asymptoton posita *Speciem* exhibet 56. *Fig.* 60.

VII.

Secet Axem in G inter *Parabolam* et Ovalem; eritque Projectio *Species* 40. *Fig.* 45.

VIII.

Tangat *Parabolam* in H; et nascetur Curva *Hyperbolo-Parabolica* qualis in *Fig.* 57 conspicitur, cum *Ovali* supra Asymptoton positâ.

Hanc *Speciem* D. *Neutonus* non recenset. Ipsius vero Aequatio est $xy' = bx' + cx + d$, eadem sc. ac *Speciei* 55. modo Aequationis $bx' + cx + d = 0$, radices ponantur negativæ,

78 *Genesis Curvarum*

gativae, vel sit Coefficiens c Affirmativa.

IX.

Secet Parabolam recta L in Punctis S, S, ubi versus Axem concava est, et ductis contingentibus Curvam S O, S O, hae inter Parabolam et Ovalem concurrent ut in O, et Ovalem in Angulo quem ibi formant complectentur; ad alteras autem partes productae Crura Parabolica secabunt. Unde erit Projectio *tres Hyperbolae cum Ovali* intra Triangulum Asymptoton comprehensâ. Hyperbola in quam projicitur Arcus rectae L et Vertici interpositus est *in-scripta*, at aliae duae quae e cruribus infinitis generantur sunt *Ambigenae*. Haec est D^o *Stirling Species II.* a *Neutono* omissa.

X.

Sin Puncta Intersectionis S, S, fuerint ubi Curva versus Axem convexa est,

est, Tangentes retro productae ipsi
occurrent ad Partes Verticis; unde
Hyperbola una erit *Circumscripta*,
reliquae duae *inscriptae*. Quae est
Species 10. Fig. 17.

XI.

Si denique recta L Curvam secet
in Punctis contrarii Flexus P, P, Tan-
gentes ad ea Puncta Curvam ibidem
secant, et tres Hyperbolae sunt *in-*
scriptae. Quae *Newtono* omissa, D^o
Stirling est *Species 24.*

SCHOLIUM.

Quâ Ratione Curvae sic genitae
Aequationibus *Newtonianis* designen-
tur facile constat. Nam tres Vertices
Figurae *Genetricis* (B, F, H,) ubi Or-
dinatae Valor fit nihilo aequalis, toti-
dem dant ejusdem conditionis in *Ge-*
nitâ. Et assumptâ pro Ordinâtâ pri-
mâ Linea Horizontali, rectae L po-
sitio Verticum illorum plagas indica-
bit, id est Signa Valorum Abscissae
ubi

80 *Genesis Curvarum*

ubi Ordinata $= 0$. Sic (N. VII.) quoniam Punctorum B, F, Projectiones supra Lineam Horizontalem, Puncti H Projectio infra eandem cadit, in Aequatione $xy' = -ax^3 + bx^2 + cx + d$ quae Curvam designat, Ordinata evanescente, duo Abscissae x Valores erunt ejusdem Signi, tertius Signi contrarii.

At Curvam genitam hac Aequatione designari patet. Nam quia Diametrum habet, deest Terminus ey ; et quia, ultra Vertices in quas projiciuntur F, H, Ordinata evadit imaginaria, oportet ut Terminus altissimus ax^3 Signo negativo afficiatur.

Quod si Vertex aliquis, recta L per ipsum transeunte, projiciatur in infinitum, Aequatio *Newtoniana* uno gradu deprimenda est; ut pro $xy' = ax^3$ &c. v. gr. fiat $xy' = bx^2 + cx + d$. Quae eadem Curvis posthac recensendis, Diametrum habentibus, applicentur.

Notan-

Notandum denique Puncta *Contrarii Flexûs* figurae Genitricis, manere in *Genitâ*, nisi per ea transeat *L*, ut in *N. XI.* Facile quoque ex ipsa Projectione discerni ad quam Projectionis Partem pertineant. Sic utrumque in Hyperbolâ circumscripta (*N. X.*) in *Ambigenis* (*N. IX.*) singulis unum reperiatis.

Pars Altera.

Ubi recta L non est Ordinatis (y) Parallela. Fig. BB.

XII.

Secet *L* *Parabolam* in Puncto quovis *T*, ad has vel illas contrarii flexûs Partes, neque *Ovalem* attingat; tangens *TQ* ad illud Punctum fiet *Asymptotos* Figurae genitae. Crurum extrema in Projectione flexu contrario jungentur ad Lineam *Horizontalem*; *Ovalis* *Ovalem* dabit: Eritque Figura Hyperbola *Anguinea* cum *Ovali*, Species 33. Fig. 39.

XIII.

Manente Puncto T, cum tangente T Q, circa illud rotari intelligatur recta L, donec Ovalem contingat in N aut K; manebit Hyperbola *Anguinea*, Ovali in *Parabolam* conversâ; Species sc. 52. Fig. 56.

XIV.

Eousque rotetur Recta L, ut Ovalem secet in Punctis R, R, ad quae rectae Ovalem contingentes triangulum efficiant S Q M cum tangente T Q, vel sint forsan Parallelae: Et in utrovis Casu erit Projectio binae *Hyperbolae inscriptae* Asymptotis quae fiunt è Tangentibus Ovalem, et tertia *Anguinea*. Quae est Species 9. Fig. 15, 16.

XV.

Ea sit rectae L Positio ut Tangentes ad R, R, concurrant ad tertiam T Q, et in Figurâ genita, Asymp-
toti

toti per idem Punctum transibunt.
Quae est *Species* 26. *Fig.* 32.

XVI.

Secet L Parabolam in T, atque eandem contingat in X; (vel X 2.) Projectio erit duae Figurae *Hyperbolicae*, quarum alteram Asymptotos fecat, cum *Ovali* conjugatâ. *Species* 46. *Fig.* 50.

XVII.

Secet L Parabolam in Punctis T, B, C; Tangentes ad ea Puncta, (TQ, FG, HI) quae neque ad idem Punctum convergere, neque omnes sibi invicem Parallelae esse possunt, totidem Asymptotos dabunt, triangulum intra quod *Ovalis* projicitur constituentes: quia sc. *Ovalis* Genitrix in Angulo externo H L G semper invenietur *. Parabola vero tres Hyperbolas dabit. Quarum quae è Cruribus infinitis nascitur, erit *Cir-*

G 2

cum-

* Conferatur *Exempl.* 2. *Schol.* 1. *Seç.* II.

84 *Genesis Curvarum*

cumscripta, quia Tangentes ad extrema Puncta (T, C,) utraeque Cruribus (projectis faltem) occurrent : Tangens vero ad B alteri e Partibus intermediis T B aut B C occurrit (modo B non sit ad contrarium Flexum, de quo postea) unde ea Pars Hyperbolam dabit *Ambigenam* ; at tertia, quam rectarum contingentium nulla secat, *Inscriptam*. Estque haec Species I. *Fig. 1, 2.*

XVIII.

Et si recta L cum Axe coincidat, tres Tangentes parallelae, in Projectione transibunt per Punctum illud in Lineâ Horizontali in quo Crurum extrema conjunguntur. *Species 27. Fig. 33.*

SCHOLIUM.

Aequatio *Neutonica* (qualis est $ax^4 + bx^3 + \&c = 0$) portiones Abscissae, inter Asymptoton aliquam quae pro ordinatâ primâ assumitur, et rectas

tas huic Parallelas quae Curvam tangent, aut per Punctum duplex transeunt, interceptas, designant. Si itaque ad quam Aequationem pertineat Projectio aliqua, ea v. gr. *N. XIV.* dignoscere velis, a Puncto *T* in quo *L* Curvam secatur, ductis Curvam contingentibus, quot duci possunt, (*TX*, *TX*₂, *TK*, *TN*,) harum Projectiones, sibi invicem et Asymptoto ex *TQ* oriundae, Parallelae, Figuram genitam contingent; Aequationis vero dimensionem, et Radicum Signa, contingentium Numerus et Positio respectu assumptae *TQ*, indicabunt. Sic in praesenti Exemplo, Numerus contingentium quaternarius Aequationem indicat $ax^4 + bx^3 + \&c = 0$, cujus radices sunt reales et inaequales. Et quia Contingentes *TK*, *TX* infra *TQ*, ac *TX*₂, *TN* supra eandem projiciuntur, id duas Radices duabus contraria Signa habere denotat.

G 3

Assumptâ

86 *Genesis Curvarum*

Assumta autem pro Ordinată primâ Afymptoto ex *Ovalem* contingente (ut S M) genitâ, quoniam a Puncto contactus R unica S M Curvam contingere potest Aequationis $ax^4 + bx^3 + \&c = 0$ Radices erunt omnes imaginariae. Qui Casus in Fig. 15. exhibetur.

Classis Secunda.

*Curvas continens quae sunt proji-
ciendo Parabolam PUNCTATAM ; O-
VALI conjugata in PUNCTUM conversâ,
per aequalitatem duarum Radicum Ae-
quationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
Neutono Speci. 69. Fig. 74.*

Pars I.

Ubi *Linea Extremorum Ordinatis*
(y) est *Parallela*. Fig. C C.

XIX.

Sit P Punctum conjugatum; et
citra illud Axem secet L ut in A:
Erit Projectio Hyperbola *Conchoidalis*
cum

1875

1875

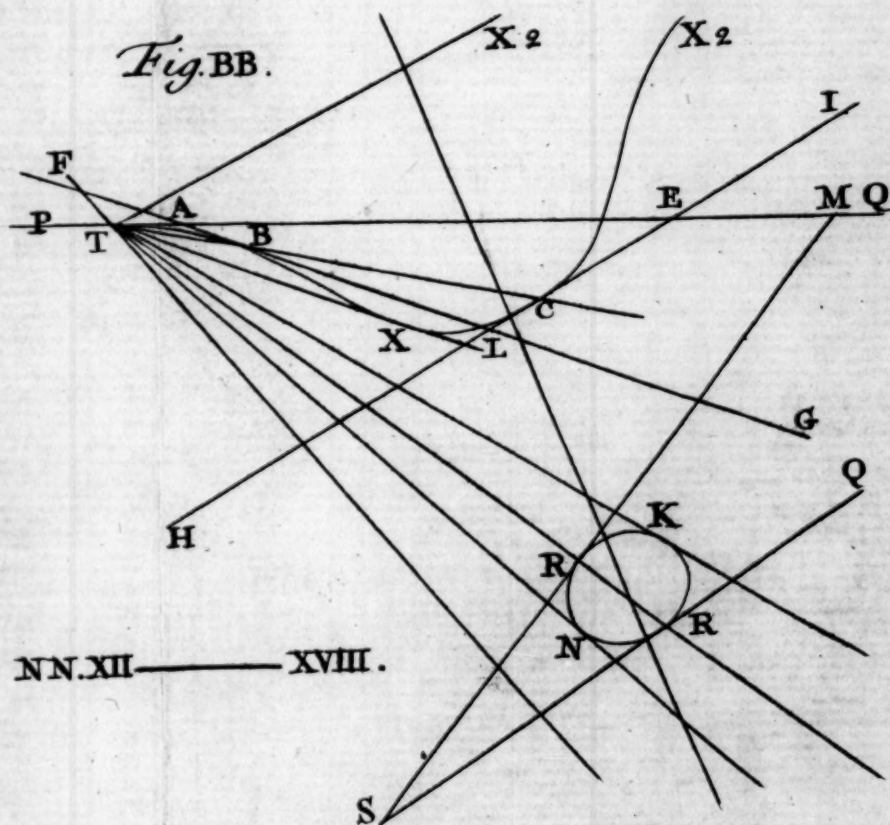
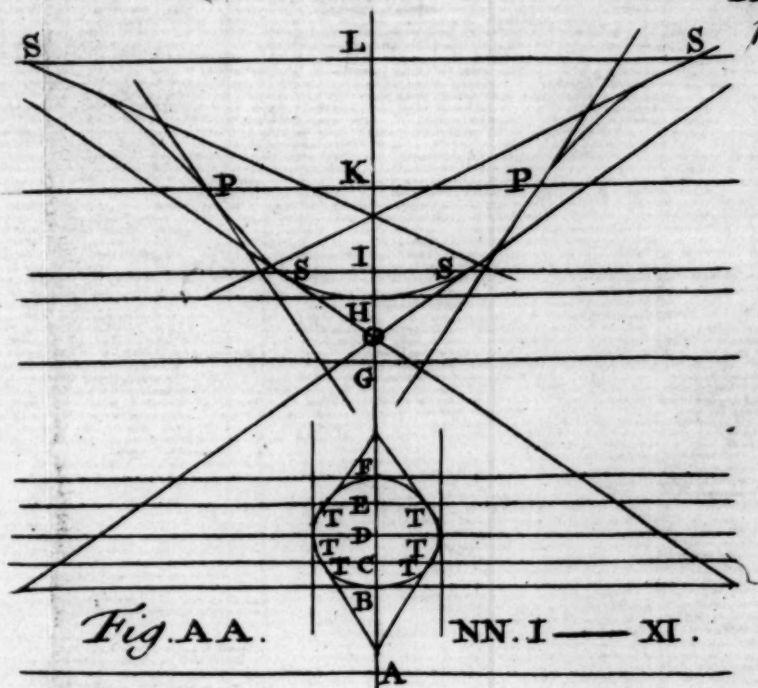
1875

1875

1875

1875

1875



cum *Puncto conjugato* ad Convexitatem fito. *Species* 43. *Fig.* 49.

XX.

Sin Axem fecet in B, inter Punctum et Verticem, erit *Speciei* 44. *Puncto conjugato supra Asymptoton Conchoidalis* projecto.

XXI.

Si per ipsum P transeat, *Conchoidalis* genita erit *Pura*. *Puncto* scilicet in infinitum projecto, adeoque pereuntibus binis Aequationis *Newtonianae* dimensionibus, fiet *Species* 63. *Fig.* 67.

XXII.

Punctatam tangat L in C, erit Projectio duae Figurae *Hyperbola-Parabolicae* cum *Puncto conjugato* supra Asymptoton fito.

Speciem hanc N^o VIII. Analogam apud *Newtonum* desiderari animadverterat D. *Nic. Bernoulli*; quod me

88 *Genesis Curvarum*

olim monuit D. Cramer, *Phil. et Math.* apud *Genevenses* celebris Professor.

XXIII, XXIV, XXV.

Secet L Parabolam punctatam ; et *Species* N N. IX, X, XI, descriptae in totidem *Analogas* transibunt, substituto pro Ovali *Puncto* conjugato.

Harum una XXIV a *Neutono* recensetur ; *Speciem* constituens 13. *Fig.* 20. N. XXIII. D^o *Stirling* est *Sp.* 15. N. XXV. *Sp.* 25.

Pars Altera.

Ubi Linea Extremorum Ordinatis non est Parallela. Fig. D D.

XXVI.

Sit P *Punctum conjugatum*, T *Punctum* aliquod in Crure *Parabola* assumptum circa quod rotari intelligatur L ; et primo situm obtineat T A vel T B ad has vel illas *Puncti* Partes, eritque *Projectio Hyperbola*
anguinea

anguinea cum *Puncto conjugato*, *Species* 36. *Fig.* 42.

XXVII.

Transeat *L* per *Punctum* conjugatum; hoc in infinitum projecto, adeoque deficientibus binis Aequationis ad Abscissas dimensionibus, Hyperbolae inscriptae *Fig.* 15, 16. jam evanuerint; Speciesque ibi descripta conversa erit in *Speciem* 61. *Fig.* 65.

XXVIII.

Si *Parabolam* contingat *Linea* Extremorum, per *T* ducta, in *S*, *Curva* genita erit duae *Hyperbolo-Parabolae* cum *Puncto conjugato*, *Species* 49. *Fig.* 53.

XXIX.

Secet *L* *Punctatam* in *T*, *M*, *N*. Tangentes ad ea *Puncta*, projectae totidem dabunt *Asymptotos* intra quas invenietur *Punctum*, seu *Ovalis*
infinite

90 *Genesis Curvarum*

infinite parva, *Parabola* autem tres *Hyperbolas* generabit, *Inscriptam*, *Circumscriptam* et *Ambigenam*. Quae est *Species* 4. *Fig.* 7.

XXX.

Si pro *Linea Extremorum* ipse *Axis Punctatae* assumptus fuerit, *Curva N. XXVI.* descripta in *Anguinam Puram* cum *Centro* transibit. *Speciem* efficiens 62. *Fig.* 66.

Classis Tertia.

Curvas continens quas generat PARABOLA PURA Spec. 71. Fig. 73, 74.

Haec plures suppeditat Casus; nam si Aequationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ Radices duae sint impossibiles, fieri potest ut *Parabola* formam indicat *Ampullatam*, qualis in *Fig. EE* conspicitur: Cujus quidem Symptomatis Determinatio hic praemit-
tenda.

Posita

Posita $a = 1$, finge Aequationem $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, é duabus $x^3 + b^2 = 0$, $x + k = 0$, in se ductis, conflatam, ut sit $y^2 = x^3 + kx^2 + b^2x + kb^2$, Aequatio ad Curvam; fiat etiam Fluxio Ordinatae y nihilo aequalis, et proveniet $x = -\frac{1}{3}k \pm \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{3}b^2}$, Abscissa ad Curvae Elementum pertinens quod est Axi Parallelum. Quoties igitur est $\sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{3}b^2}$ quantitas realis, Parabola erit *Ampullata*; Si $\frac{1}{9}k^2 = \frac{1}{3}b^2$, erit inter *Campaniformam* et *Ampullatam* media.

Si Aequationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radix realis (k) ponatur affirmativa, habebitur $x = +\frac{1}{3}k \pm \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{3}b^2}$; cujus quidem forma nihil impedit quo minus Figura sit pariter *Ampullata*. Obstat autem limitatio hinc orta, quod sit, ex *Hypothesi*, Abscissa k minima quae Ordinatum agnoscat realem, fitque Valor modo inventus ipsa k necessario minor.

92 *Genesis Curvarum*

minor. His praelibatis, Projectiones Parabolae *Purae* sic enumerantur.

Pars I.

Ubi Linea Extremorum est Ordinatis (y) parallela. Fig. E. E.

XXXI.

Secet L Axem *Purae* extra Curvam ut in Q, et Projectio erit Hyperbola *Conchoidalis Pura*: manent nimirum radices duae impossibiles Figurae Genetricis in Genitâ, ut fiat *Species 45. Fig. 48, 49.*

SCHOLIUM.

Projectio *ampullata* nonnunquam evadet, licet Figura exposita sit tantum *Campaniformis*; quando sc. binae tangentes duci possunt quae concurrunt ad alteras Partes rectae L respectu verticis. Nam Tangentes illae, et Arcus contactibus vicini, in Projectione versus *Asymptoton* convergent, ut in *Fig. 48.*

XXXII.

XXXII.

Tangat L Parabolam in Vertice V,
et fit *Species* 53. *Fig.* 57.

XXXIII.

Secet L Curvam in A, A, ut Tangentes concurrant ad Partes Verticis, at productae fecent Crura infinita; atque *Hyperbolae* duae erunt *Ambigenae*, una *Inscripta*. *Asymptotôn* vero concursus cadet supra tertiam, quae est Projectio Ordinatae infinite distantis. *Species* 15. *Fig.* 21.

XXXIV.

Secet in F, F, ut Tangentes sibi mutuo occurrant ad Partes vertices, ut prius, Curvamque fecent ad easdem Partes; eruntque duae *Hyperbolae inscriptae*, tertia, supra Horizontalem projecta, *Circumscripta*. Quae est *Species* 14. *Fig.* 20.

XXXV.

XXXV.

Transeat L per C, C, ut Tangentes concurrant ad Partes Crurum et ad eandem Curvam secant; eritque Projectio duae *Hyperbolae Ambigenae*, una *Inscripta*, ad Latera Trianguli Asymptoton positae. *Species* 17. *Fig.* 23.

XXXVI.

Sin ad Partes verticis Curvam secant (L transeunte per D, D) una erit *Circumscripta*, reliquae *Inscriptae*. *Species* 16. *Fig.* 22.

XXXVII. XXXVIII.

Sint Tangentes Parallelae, idque vel ad B, vel ad E; ipsae projectae ad Lineam Horizontalem (tertiam *Asymptoton*) concurrent: Unde prior Casus *Speciem* dabit 29. *Fig.* 35. Alter *Speciem* 28. *Fig.* 34.

XXXIX.

XXXIX, XL, XLI.

Transeat L per Puncta *Contrarii Flexûs*, eruntque Hyperbolae omnes *Inscriptae*: Tangentes autem in Parabolâ *Campaniformi* coibunt ad Partes verticis, in *Ampullatâ* ad Partes Crurum, vel in eâ quae inter utramque *Media* est erunt sibi invicem parallelae; qui Casus totidem Species dabunt 1^{us} Speciem 22. Fig. 28. 2^{us} Speciem 23. Fig. 29. 3^{us} Speciem 32. Fig. 38.

Pars Altera.

Ubi Linea Extremorum non est Ordinatis (y) Parallela. Fig. DD, FF.

XLII.

Parabolae *Purae* semel occurrat Linea Extremorum TA, ut in T Puncto, ea in *Anguineam Puram* sine Centro et Diametro projicietur; Speciem sc. 37. Fig. 42.

XLIII.

XLIII.

Tangat Linea Extremorum T S Curvam in S (*Fig. D D*) et projicientur duae *Hyperbolo-Parabolae Puræ*. *Species 50. Fig. 53, 54.*

XLIV.

Secet Parabolam in Punctis T, M, N in quibus Curvam tangant rectæ T π , N π , MQ, Triangulum constituentes π R Q, cujus vertex R ad has Partes rectæ L locetur, et tres *Hyperbolæ* sic Projectæ *Speciem* constituunt 5. *Fig. 7, 8**.

XLV.

In eâdem (*Fig. F F*) finge rectam L circa M rotari, donec pervenerit in situm t M n, ut sit Trianguli a Tangentibus comprehensi vertex r inter rectam L et Tangentem t p q positus; quo Casu *Hyperbolæ* ad Latera Trianguli

* Conferatur N. XVII,

anguli *Asymptotôn* constituentur, *Speciem* 6. exhibentes. *Fig.* 9, 10.

XLVI.

Ea sit rectae n M t Positio: ut evanescat Triangulum p q r; et *Asymp-* totis per idem Punctum transeuntibus, orietur *Species* 24. *Fig.* 30.

XLVII.

Accepto denique pro *Lineâ* *Extremorum* ipso *Parabolae* Axe, erit *Projectio Anguinea pura* cum Centro, *Species* 38. *Fig.* 43.

SCHOLIUM I.

Projectionum Casus illos, ubi *Linea Extremorum* per alterutrum *contrarium Flexum* ducitur, hætenus omissi sunt, ut universos unius Theorematis ope, atque eâdem operâ abolverem.

H THEO-

THEOREMA I.

In PARABOLA DIVERGENTE cum OVALI conjugatâ (Fig. G G) si, a Puncto Contrarii Flexûs P, ducantur rectæ PA, PB, PC, Curvam contingentes in A, B, C; erunt tria Contactûs Puncta ad eandem rectam.

DEMONSTRATIO.

Sit enim ZV Axis Curvae, ipsi occurrens ad Vertices V, v, u, in quibus eandem contingant VQ, vR, uS, sibi invicem parallelæ; et assumptâ pro *Lineâ Extremorum* rectâ LM *Parabolam* contingente in P, si Curva, ritu præcedentium, in Planum projici concipiatur, erit projectio etiamnum *Parabola divergens cum Ovali, Genita* sc. ejusdem Speciei cum *Genitrice*. Et quum, in Projectione istâ, *Parabolæ Crura* infinita ad Punctum in *Lineâ Horizontali* coeuntes, *contrarium Flexum* ibidem efficiant, at Contingentes VQ, vR, uS,

T
pu

<
A

TAB. IX.
pa. 98.

Fig. DD.

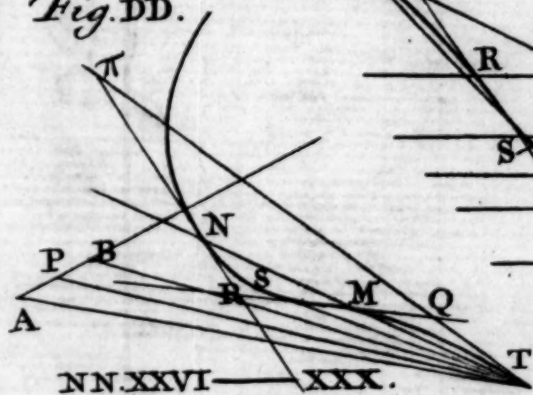


Fig. CC.

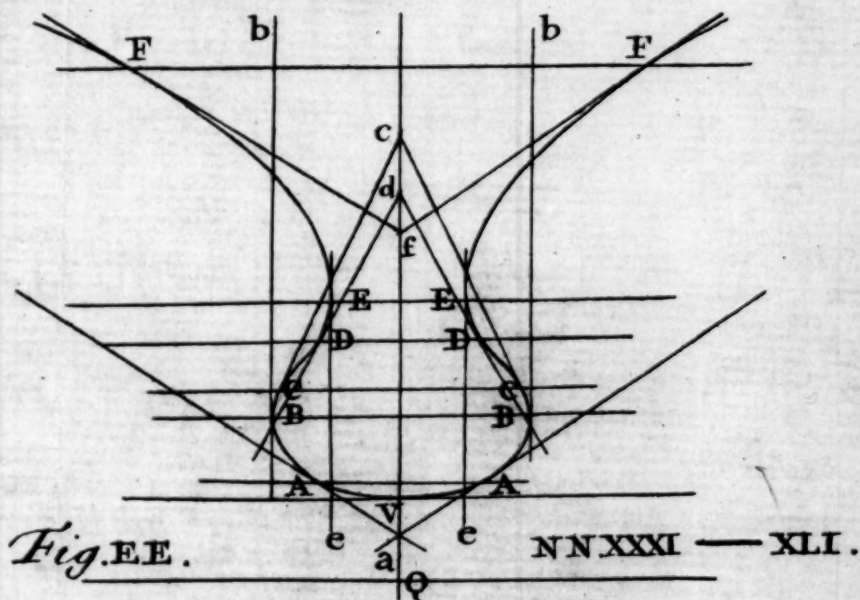
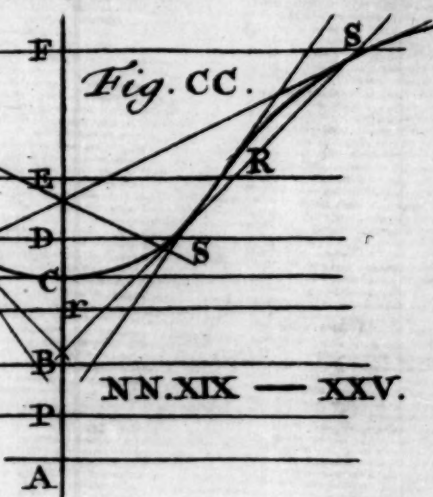
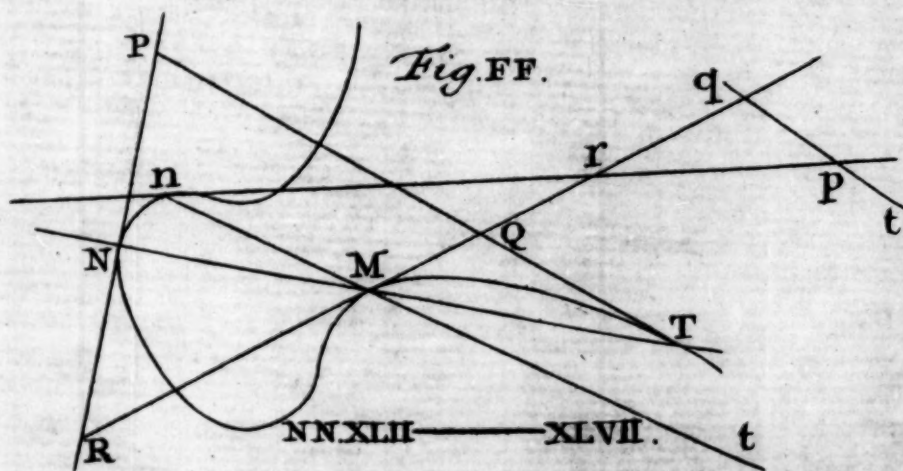


Fig. FF.



û S, ad idem illud Punctum conver-
gant, liquet Propositum. Erant e-
nim Puncta Contactûs V, v, u, ad e-
andem Rectam in Figurâ *Genitrice*;
et vicissim, Puncta A, B, C, in Verti-
ces Figuræ *Genitæ* projecta, in eâ-
dem rectâ, eâ sc. quæ in Axem *Ge-
nitæ* projicitur, extitisse necesse est.
Q. E. D.

COROLL. I.

In *Punctatâ* et *Purâ*, Tangens
PC projicitur in Rectam quæ *Pa-
rabolam Genitam* in Vertice contin-
gat, sitque ejusdem Ordinatis Paral-
lela.

COROLL. 2.

Constat etiam non modo in *Pa-
rabolis* hisce, sed in *Curvis* omnibus
exinde derivatis, idem obtinere. *Cur-
vasque* omnes ex unâ qualibet ejus-
dem *Classis* generari.

Hinc Projectiones modo memora-
tas recensere et ad *Species* notas re-

100 *Genesis Curvarum*

ferre facile fuerit, etsi novi quiddam primâ facie minitentur. Cum enim Contingentes a Puncto in quo Linea Extremorum Curvam secat exeuntes, Figurae *Genitae* vertices determinant * ; sint autem, in Casu proposito, vertices in eâdem rectâ constituti ; palam est Figuram *Genitam* fore aliquam è Curvis prius descriptis, *Diametro* destitutis, in *Analogam*, quae *Diametrum* habeat, conversam. Singulae autem ejusmodi Conversiones sunt quae sequuntur.

1.	N. XII	transit in	N. I vel VII.
2.	XIII	- - -	II vel VI.
3.	XIV	- - -	III vel V.
4.	XV	- - -	IV.
5.	XVI	- - -	VIII.
6.	XVII	- - -	X.
7.	XXVI	- - -	XIX, XX.
8.	XXVII	- - -	XXI.
9.	XXVIII	- - -	XXII.
10.	XXIX	- - -	XXIV.

II.

* Vid. pag. 79, 80.

11. N. XLII in XXXI.

12. XLIII XXXII.

13. XLIV XXXIII, XXXIV.

14. XLV XXXV, XXXVI.

15. XLVI XXXVII, XXXVIII.

16. } Et si fuerit L quae Curvam con-

17. } tingit ad *Contrarium Flexum*,

18. } renascitur *Species Genitrix*.

SCHOLIUM 2.

D. Mac Laurin, qui haec inspicere dignatus erat, *Theorema* egregium de *Lineis tertii Ordinis* communicavit, *Literis* 18 Feb. 1717-8, ad me datis; quod et nunc eximio *Operi* de *Fluxionibus* insertum video *.

“ *Lemma*, inquit, de Punctis con-
 “ trarii Flexûs, in primis notatu dig-
 “ num. Illud quidem mihi non
 “ prius observatum ex Affectione ta-
 “ men harum Curvarum generali
 “ statim deduxi, a *Neutono* aliove
 “ quopiam non memoratâ, at quam
 “ in pluribus hujusmodi investiga-
 H 3 “ tionibus

* *Art.* 401.

102 *Genesis Curvarum*

“ tionibus utilem inveneram. Hujus
 “ te nunc participem faciam, quo
 “ scripti tui Usus rependam; siquam
 “ inveneris demonstrationem, me mo-
 “ neas velim; a meâ certe, methodo
 “ quadam particulari inventâ, diver-
 “ sam fore existimo.

“ Sit (*Fig. HH.*) *A Punctum in*
 “ LINEA TERTII ORDINIS *a quo binæ*
 “ *Curvæ contingentes, AC, AS,*
 “ *duci queant, (quod semper fieri po-*
 “ *test nisi in quibusdam simplicioribus,*
 “ *ut in PARABOLA CUBICA et CIS-*
 “ *SOIDE:)* *Et si a Contactibus C, S*
 “ *ducantur CP, SP ad Curvæ*
 “ *concurrentes in P, ipsamque secan-*
 “ *tes in N, M; dico junctas CM,*
 “ *SN concurrere ad eandem Curvæ*
 “ *in Q Puncto.*

“ Huic Proprietati adnectitur Me-
 “ thodus quædam quâ LINEAM TER-
 “ TII ORDINIS *per SEPTEM Puncta*
 “ *data, BINASQUE positione DATAS*
 “ *coningentem, describere novi, five*
 “ *Curva illa per Punctum duplex*
 “ *transeat,*

“ transeat, five non. Et hujus qui-
 “ dem Problematis Constructione,
 “ aliisque similibus, quae *Newtonus* de
 “ Curvarum descriptione docuit lon-
 “ gius promotum iri sperandum, non
 “ ex multifariâ simul et superflua
 “ illarum descriptione quae *Puncto*
 “ *duplici* dotantur. Illud enim af-
 “ firmare non dubito, *Curvas* descri-
 “ bendi Rationem nullam hactenus
 “ editam, quae Rectarum et Angu-
 “ lorum circa datos Polos rotatione
 “ conficitur, ad eas quae *Puncto du-*
 “ *plici* destituuntur pertingere; quae
 “ tum demum describentur si Puncta
 “ angularia rectas quasdam datas per-
 “ currant: ut in *Prop. 15. Descrip.*
 “ *Curv. Part. I.* olim ostendi, et si-
 “ quando ea retractare licuerit, lucu-
 “ lentius ostensurus sum. Haec au-
 “ tem memoro, quod, Reipublicae
 “ Literariae plurimum interesse in-
 “ telligam, ne, Scientiae vel Specu-
 “ lativae quae dicitur, Pars aliqua

104 *Genesis Curvarum*

“ ultra limites quos revera attigit pro-
 “ vecta existimetur.

“ In *Sectione* quavis *Conicâ*, et
 “ rectâ in eodem Plano ductâ, Pro-
 “ prietatem analogam facile agnos-
 “ ces † * * * * * Ostendi etiam po-
 “ test; si a *Puncto A* bis duae Con-
 “ tingentes duci queant, rectas quae
 “ bina quaevis *Contactus Puncta* con-
 “ jungunt ad *Curvam* se decussare,
 “ nisi forte *Parallelae* evaserint sibi
 “ invicem atque *tangenti* ad *distan-*
 “ *tiam infinitam*. Atque hinc quoad
 “ memini (nihil enim a me exscrip-
 “ tum) ad *Lemma* tuum deductus
 “ sum.

“ Quod si *Tractatum* illum editu-
 “ rus, his nostris uti volueris, nil re-
 “ cuso.” * * * *

Quâ arte Propositiones istas inve-
 nerit Vir Cl. me latet. Exinde ta-
 men ad *Sequentia*, per *Methodum*
Projectionum, deductus sum.

Theo-

† Vid. supra *Seç*, III. *Schol. ult.*

THEOREMA II. Tab. X. Fig. Q.

In Curvis quarum Aequatio $x y^2 - e y = b x^2 + c x + d$, quoties Aequationis $b x^2 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e e = 0$ Radices sunt reales et inaequales, sit τ Vertex quilibet (in quo sc. recta Curvam contingens est Asymptoto $P R$ parallela,) $C \tau D$ recta per Verticem illum Curvae occurrens in Punctis C, D ; ductisque CA, DB Abscissae SL parallelis, quarum illa Curvam secet in A , juncta $A \tau$ (et forté producta) rectam DB ad Curvam secabit in Puncto B .

DEMONSTRATIO.

Accipiat pro Abscissâ novâ ipsâ Contingens $E \tau e$, ad quam in Puncto B ordinetur AC ; tum vero transformatâ ritè Aequatione, deletisque, ut aequum, terminis quos neutra variabilis ingreditur, invenies esse ubique rectangulum $AE \times EC$ ad ipsius $E \tau$ quadratum in ratione datâ, quam

quam nempe habet r ad Unitatem ;
 posito quod sit r Aequationis $b x^3 +$
 $c x^2 + d x + \frac{1}{4} e e = 0$ radix ad
 Verticem τ pertinens. Sed, ob Tri-
 angula homologa, est rectangulum
 $D F \times F B$, sub Segmentis in quae
 Contingens E e ipsam $D B$ dividit in
 F , ad τF quad. in eadem Ratione ;
 quare quum sit Punctum D ad Cur-
 vam (*ex hyp.*) ad eandem erit et Punc-
 tum B . *Q. E. D.*

COROLL.

Inversâ nunc denique Projectione
 ad prius illud *D. Mac Laurin* The-
 orema regredi licebit.

Assumptâ enim pro *Linea Extre-*
marum rectâ quavis $Z Y$, Asymptoto
 non parallelâ, nec quae per ullum è
 Punctis A, B, C, D , transeat, Para-
 bolae Projectionem contingeret *Hori-*
zontalis in Puncto ad quod conver-
 gunt Parallelarum $A C, D B$ Projec-
 tiones. At Contingentis $E \tau e$ Pro-
 jectio eidem Horizontali occurret (pu-
 ta

ta in Puncto P) ubi coeunt Crurum Hyperbolicorum Projectiones. En itaque, in hac Projectione, binas rectas ex eodem Curvae Puncto (P, ductas, quae ipsam Curvam contingunt. Unde quum in eadem Curvâ manent et Punctorum A, B; C, D; Projectiones, rectis per Puncti τ Projectionem transeuntibus connexae, constat Propositum. Curvarum enim de quibus hic agitur quaelibet in *Hyperbolo-Parabolam* ita projici potest, ut *Genitricis* Punctum quodcunque datum, *Genitae* Verticem occupet.

THEOREMA III. *Vid. Fig. Neut.*

Sint T, t, τ , γ , quatuor Vertices Curvae alicujus Neutonianaë, quorum bini quivis rectis (ut T τ , t) jungantur, erit rectarum intersectio ad Curvam.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Curvam secet harum altera ($T \tau$), si Opus producta, in Puncto C. Ex hoc ducatur Abscissa nova, ad quam, in Punctis P, p, π , ϖ , ordinentur rectae quae Figuram ad Vertices T, t, τ , γ contingunt. Transformatâ nunc Aequatione, quaeratur Valor Ordinatae Curvam contingentis, eritque hujus Expressio quatuor Ordinatis communis. At quum fit, ex Constructione $T \tau C$ recta, adeoque Ordinatae $T P$, $\tau \pi$, Abscissis $C P$, $C \pi$ Proportionales, erunt et $t p$, $\gamma \varpi$, ut Abscissae $C p$, $C \varpi$, id est, recta $t \gamma$ (ad Abscissam pariter inclinata) per idem Punctum C transibit. *Q. E. D.*

COROL. I.

Projiciatur Figura, ut *Tangentes Verticales*, *Asymptotos*, et *Crura infinita* huic applicata ad idem Punctum coeant, utque ultro prodibit alterum *D. Mac Laurin* Theorema modo

do memoratum *. Quod sc. “ duc-
 “ tis ab eodem Curvae *Newtonianae*
 “ Puncto quatuor rectis quae ipsam
 “ contingant, si bini quivis contactus
 “ rectis jungantur, erit rectarum in-
 “ tersectio ad eandem Curvam.”

C O R. 2.

Hinc quoque demonstratur Propo-
 sitio illa in quam prius incideram,
 “ Si a Puncto contrarii Flexûs, du-
 “ cantur tres rectae quae Curvam
 “ contingant, fore tres contactus in
 “ eâdem rectâ : Accedente sc. Punc-
 to a quo rectae duci ponuntur, ad
 alterum contrarium Flexum, ut tan-
 dem cum ipso coincidat.

C O R. 3.

Transeat Linea Extremorum per
 unum e Punctis Contactûs, et ma-
 nebunt in Projectione tres duntaxat
 contingentes, quae Asymptoto oc-
 current in Puncto ad quod Crurum
 Hyper-

* Vide *Treatise of Fluxions*, §. 401.

110 *Genesis Curvarum*

Hyperbolicorum Projectiones conver-
gunt. Ex quo colligitur "*In Curvis*
"*qualis est* FIG. 50. ENUM. NEUT.
"*si a Puncto in quo Asymptotos*
"*Curvam secat, tres Tangentes duci*
"*queant, ductis duabus rectis qua-*
"*rum altera transeat per duo quae-*
"*vis contactus Puncta, altera per*
"*tertium contactum sit Asymptoto*
"*parallela, harum concursus fore*
"*ad Curvam.*"

COR. 4.

Ductâ denique Lineâ Extremorum
per binos Contactus, sequetur ut,
"*Quoties duae Asymptoti ad Curvam*
"*se decussant, id est, si, in* FIG. NEUT.
"*Trianguli D d d Angulus unus sit*
"*ad Curvam, et ab Angulo illo duci*
"*queant duae Tangentes; recta quae*
"*hos contactus conjungit, sit tertiae*
"*Asymptoto parallela.*"

In summâ, illud quidem satis con-
stat; si in his vel quibusvis aliis Cur-
vis indagari queant Theoremata sim-
pliciora,

Fig. GG.

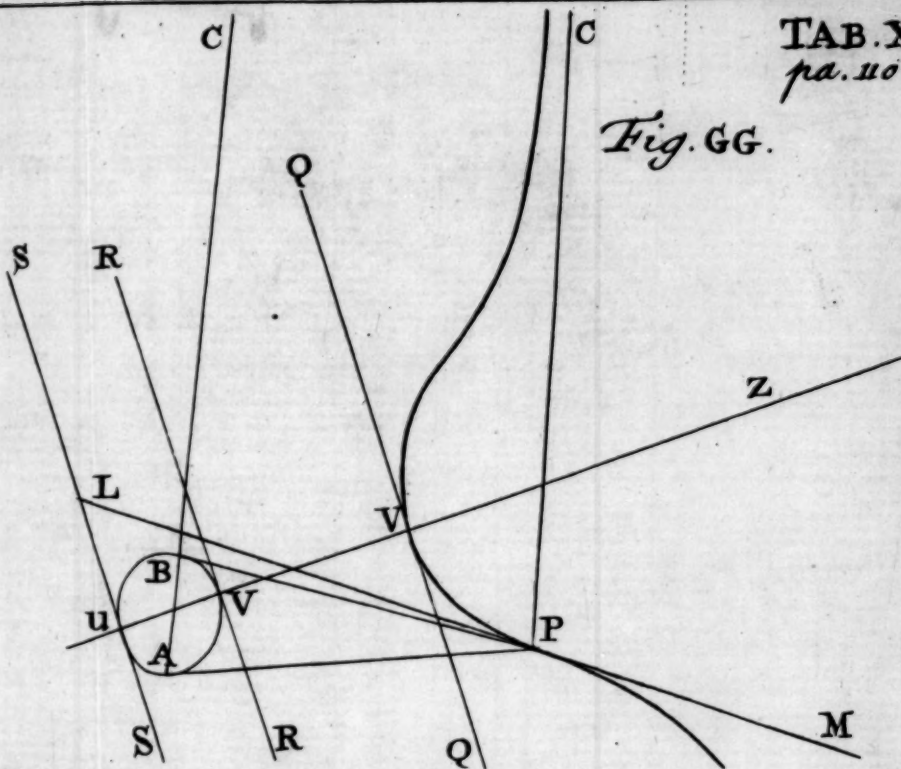


Fig. HH.

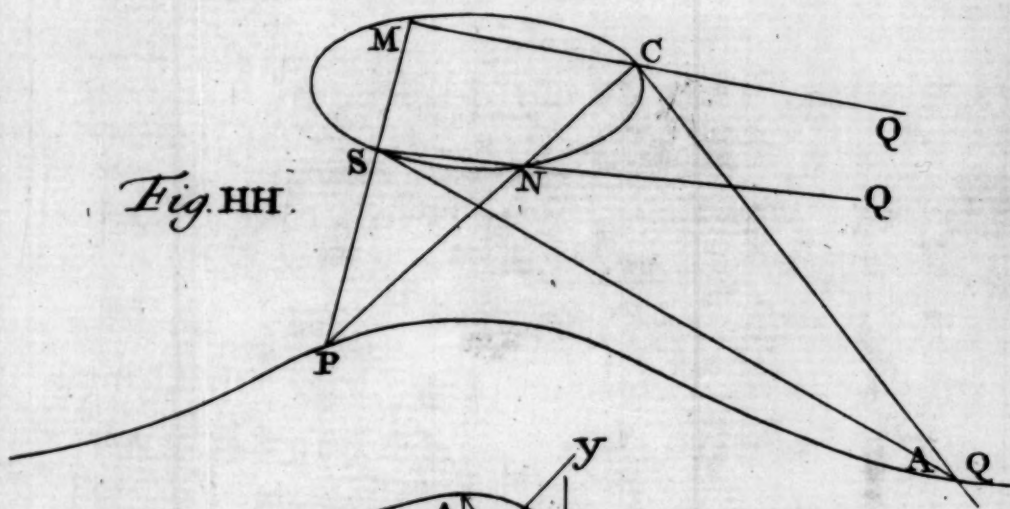
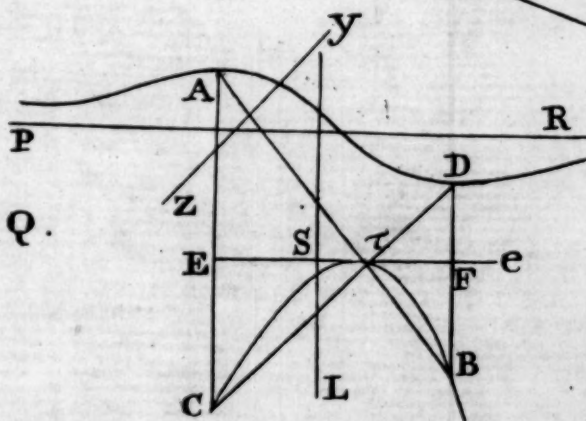


Fig. Q.



pliciora, ad Parallelas adscriptas pertinentia, haec omnia ad plura alia de Lineis ad Puncta data convergentibus, transferri posse: quae aliâ quacunque ratione inventu difficillima forent.

Sed ad Enumerationem institutam redeamus.

Classis Quarta.

Curvas continens quae fiunt ex Parabola Nodata. Spec. 68. Fig. 73.

Pars I.

Ubi Linea Extremorum est Ordinatae (y) parallela: Fig. K K.

XLVIII.

Secet L Axem *Parabolae Nodatae* cis Verticem ut in A, erit Projectio *Hyperbola Nodata*, cui Asymptotos est Linea Horizontalis seu Projectio Ordinatae ad Distantiam infinitam. *Species 41. Fig. 46.*

XLIX.

XLIX.

Si *Nodum* contingat in B, is in duo
Crura *Parabolica* protendetur, ut fiat
Species 54. *Fig.* 58.

L.

Secet Axem in C, Curvam in T, T,
ut quae in illis Punctis ipsam con-
tingunt convergant ad Partes Verticis.
Et Figura Genita erit tres *Hyperbo-*
lae inscriptae, quarum duae se mutuo
decussant; et quia tangentium Con-
cursus supra Horizontalem projicitur,
fit *Species* 19. *Fig.* 25.

LI.

Sin ad Partes Crurum convergant,
Lineâ sc. Extremorum Axem secante
in E; Asymptoti in quas projiciun-
tur Tangentes concurrent infra Ho-
rizontalem; estque *Species* 18. *Fig.*
24.

LII.

Sint denique Tangentes illae parallelae, ut Asymptoti concurrant ad Horizontalem ; et evanescente Triangulo convertuntur binae praeecedentes in *Speciem* 30. *Fig.* 36.

LIII.

Transeat L per Punctum *Nodi* F, et Tangentes ad illud Punctum projicientur in duas Asymptotos parallelas, ab Axe aequidistantes ; ut fiat *Species* 60. *Fig.* 64.

LIV.

Secet Axem in G, Crura infinita in TT ; ad quae Puncta Curvam contingentes projiciantur in binas Asymptotos supra tertiam se decussantes ; et fiet *Species* 11. *Fig.* 18.

Pars Altera.

Ubi Linea Extremorum non est Ordinatae parallela. Fig. LL.

LV.

Circa Punctum aliquod T in Cru-
re *Nodatae* assumptum rotari intel-
ligatur recta L; et primo Situm ob-
tineat T M, ut Curvae in unico
Puncto occurrat: Tangens ad T,
projecta, evadet Asymptotos Hyper-
bolae *Anguineae* cum *Nodo*, *Speciei*
34. *Fig.* 40.

LVI.

Tangat *Nodum* in N, isque in bi-
na Crura *Parabolica* projectus *Spe-*
ciem dabit 51. *Fig.* 55.

LVII.

Secet deinde *Nodum* in S, S, ut
Tangentes ad S, S, convergant ad has
Partes Lineae Extremorum ut in P,
fitque Triangulum contingentium
P Q R. In Projectione Punctum
Crucis cadet extra Triangulum A-
symptotôn, nempe sub basi in quam
pro-

projicitur Tangens TR^* ; Figura autem erit hujusmodi.

Segmentum SNS Hyperbolam dabit *Inscriptam*. Segmentum $SDABFT$ alteram *Inscriptam* Asymptotis quae fiunt e Tangentibus TR , SR . At Segmentum $SEABF$ cum Crure infinito FX ipsi adjuncto, et reliquo alterius cruris a T versus Z in infinitum excurrentis, Hyperbolam dant *Ambigenam*, quam sc. fecat altera Asymptotos e Tangente TR genita. Estque haec *Species 8.* *Fig. 11, 12.*

Nota. *Fig. 12*, Casum exhibet ubi Projectio Tangentis TR pro Ordinata primâ usurpatur; *Fig. 11*, ubi alia Asymptotos eâ vice defungitur.

LVIII.

Sin recta L in Situm transeat TBB aut TAA ut Tangentes concurrant ad alteras Partes, ut in p , vel sint forte parallelae, in priore casu Pro-

I 2

jectio

* Vide *Schol. 1. Sect. II.*

116 *Genesis Curvarum*

jectio eatenus differet a praecedente, quod Punctum *Crucis*, seu ubi duae Hyperbolae se mutuo decussant, cadere possit ad Verticem Trianguli Asymptotôn. Id vero fiet quoties Nodum contingentes B p (*Fig. M M*) concurrunt ad has Partes Tangentis Tr. Quae est *Species 7. Fig. 13, 14.*

LIX.

Si Tangentium concursus p in ipsam Tr incidat, evanescente triangulo, fit *Species 25. Fig. 31.*

LX.

Coeant Puncta B, B, cum Puncto Nodi F, et quae Curvam in illo Puncto contingunt GH, IK, projicientur in duas Asymptotos parallelas, secundam quas Crura extendet *Hyperbola* ex Nodo genita. Reliquum Figurae duas alias edet *Hyperbolas*, quarum altera est *Ambigena. Species 57. Fig. 61.*

LXI.

LXI.

Accedat et T ad F, ut sit contingens G H Linea Extremorum; et nascentur duae Figurae *Hyperbolo-Parabolicae* (*Neutono Tridens.*) *Species* 66. *Fig.* 72.

LXII.

Secet L Crura in Punctis D, M, N; *Nodus* cum Parte Crurum abscissâ abit in Hyperbolam *Nodatam*, Portio Punctis D, M interjecta in *Inscriptam*, Reliquum Figurae in *Ambigenam*. *Species* 2. *Fig.* 3, 4.

LXIII.

Coeant M, D, ut Linea Extremorum Crus alterum contingat, ut in m; et peribunt duae Asymptoti cum Hyperbolâ Inscripta, manentibus binis Curvis *Hyperbolo-Parabolicis*, quarum altera est *Nodata*, *Species*. sciz. 47. *Fig.* 51.

I 3

Atque

LXIV.

Transeat *L* per Punctum *F*, Nodo ubivis occurrens ut in *t*; patet Figuram Genitam fore *Speciei* 58. *Fig.* 62.

LXV.

Quae, si fuerit *t* ad Verticem Parabolae, transibit in *Speciem* 59. *Fig.* 63.

Atque hae sunt Projectiones Parabolae *Nodatae*.

Classis Quinta.

Curvas continens quas generat Parabola Cuspidata, alias Parabola Neiliana, et Semi-cubica. Spec. 70. Fig. 76.

Pars I.

Ubi Linea Extremorum est Ordinatae y parallela. Fig. NN.

LXVI.

TAB. XI.

pa. 118.

Fig. KK.

NN. XLVIII — LIV.

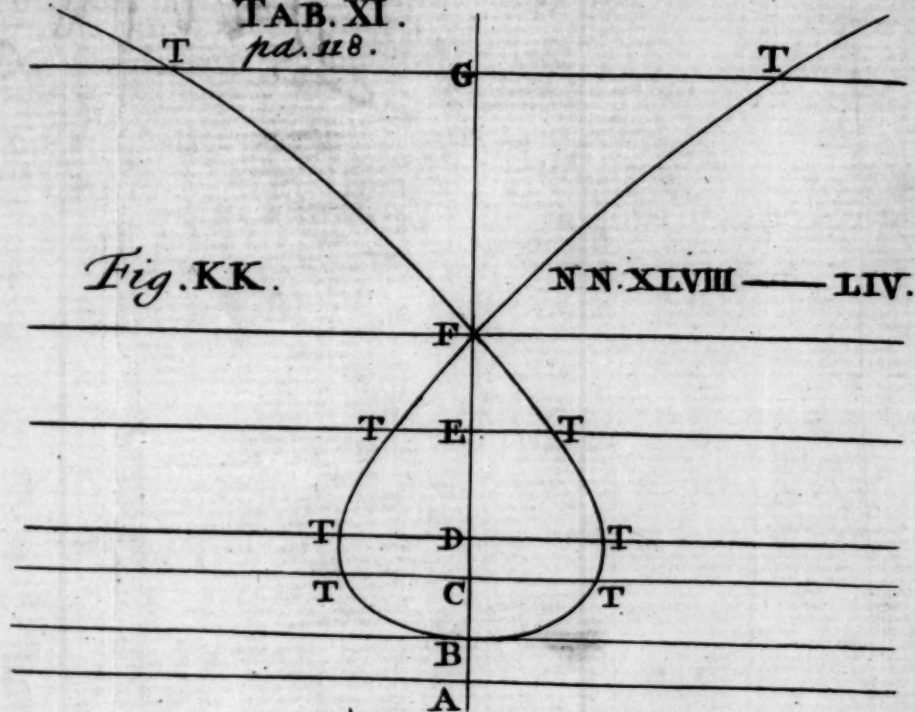
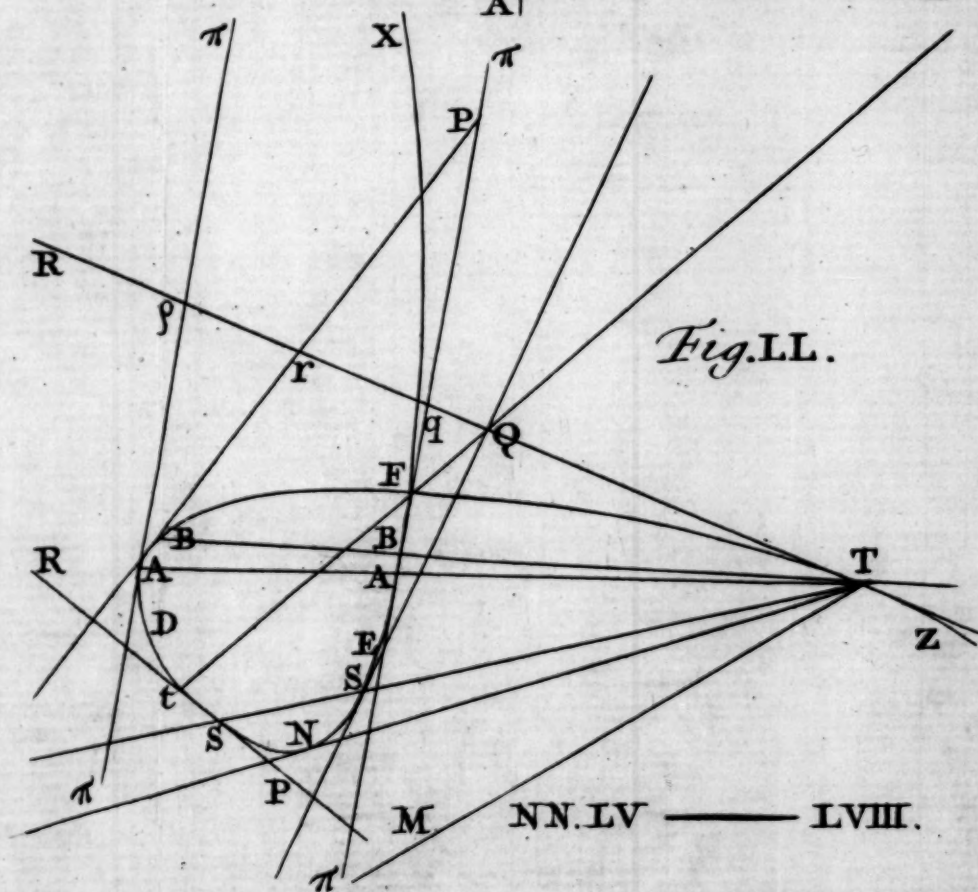


Fig. LL.

NN. LV — LVIII.



LXVI.

Secet L Axem in A cis Verticem;
erit Projectio Species 42. Fig. 47.
Quae est Cissois Veterum.

LXVII.

Si transit per Cuspidem, Figura
erit duae Hyperbolae Speciei 65.
Fig. 69.

LXVIII.

Si Curvam secet in Punctis T, T,
fiet Species 12. Fig. 19.

Pars Altera.

Ubi recta L Ordinatae non est pa-
rallela. Fig. O O.

LXIX.

Secet L Cuspidatam in unico Punc-
to T; erit figura genita Anguinea
Cuspidata, Speciei 35. Fig. 41.

LXX.

Transeat deinde per *Cuspidem*, atque orientur duae *Hyperbolae* ad duas *Asymptotos*, quarum altera *Curvam* fecat. *Species* 64. *Fig.* 68.

LXXI.

Secet in tribus Punctis T, M, N; et nascentur tres *Hyperbolae*, quarum una *Inscripta* est, una *Ambigena*, tertia autem *Cuspidata* et *Circumscripta*. *Species* 3. *Fig.* 5, 6.

LXXII.

Coeuntibus T, M, in S, ut pereant duae *Asymptoti* cum *Hyperbolâ* inscripta, oritur Figura *Hyperbolo-Parabolica Cuspidata*, *Speciei* 48. *Fig.* 52.

LXXIII.

Ipse *Axis* pro *Linea Extremorum* usurpetur, et *Parabola Cuspidata* transf-

transibit in *Cubicam*, Speciem sc. 72.

Fig. 77.

LXXIV, LXXV, LXXVI, LXXVII,
LXXVIII.

Quibus si quinque Figuras *Generatrices* adnumereres, erunt Lineae tertii Ordinis *septuaginta et octo*.

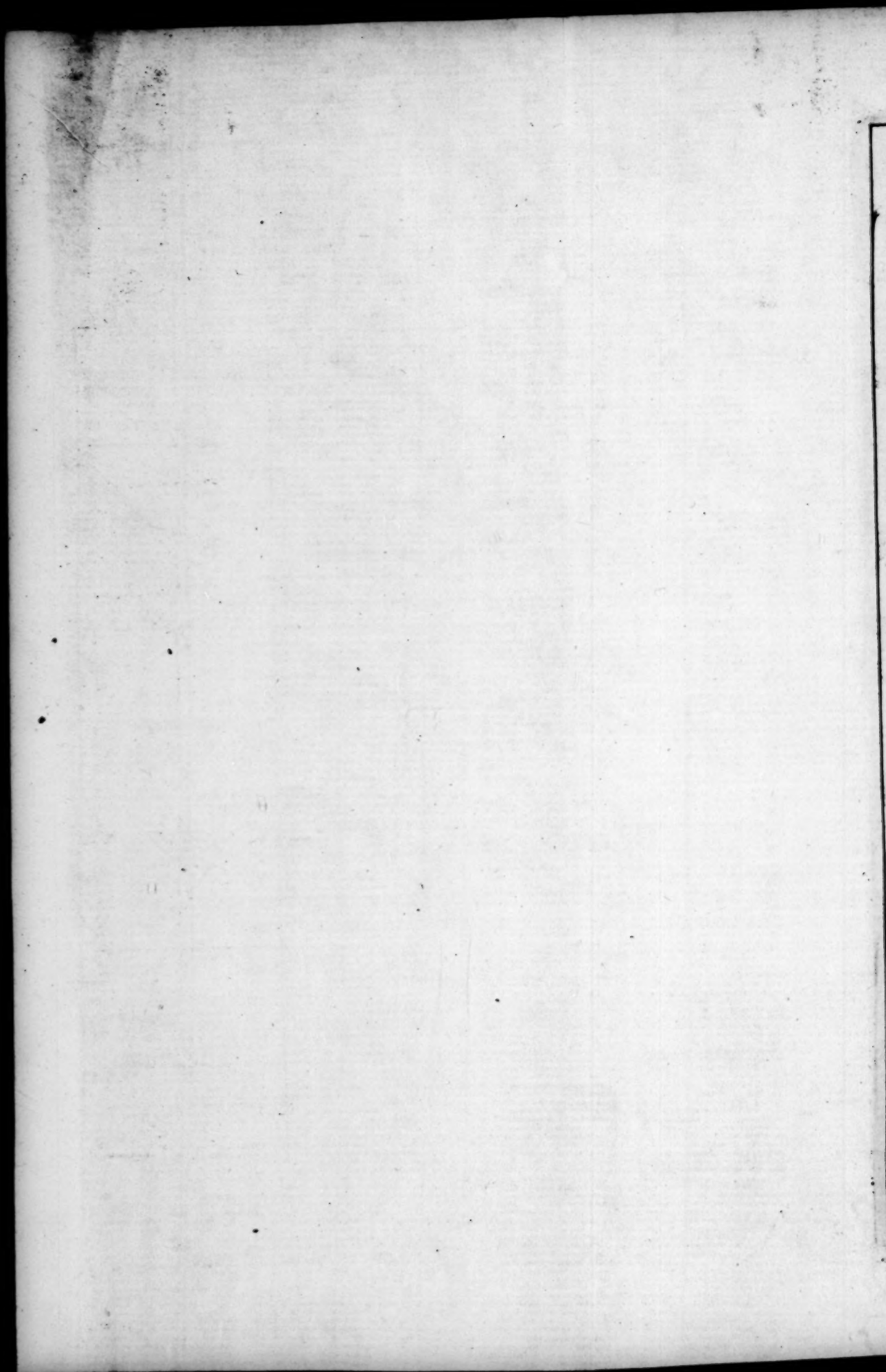
SCHOLIUM.

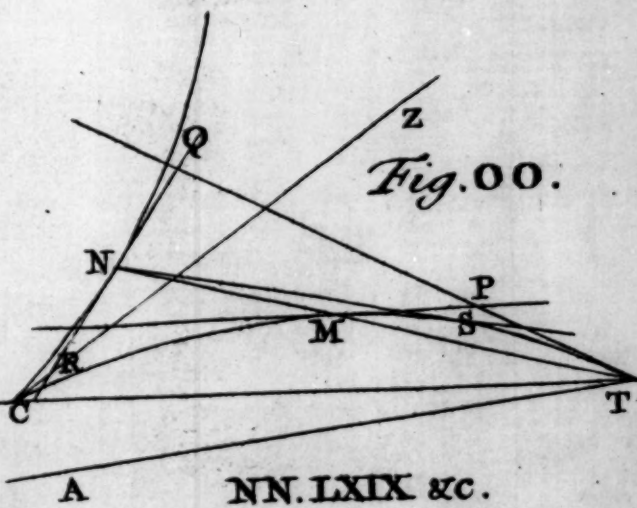
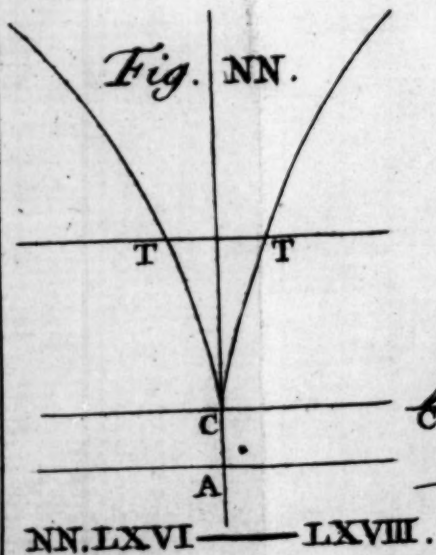
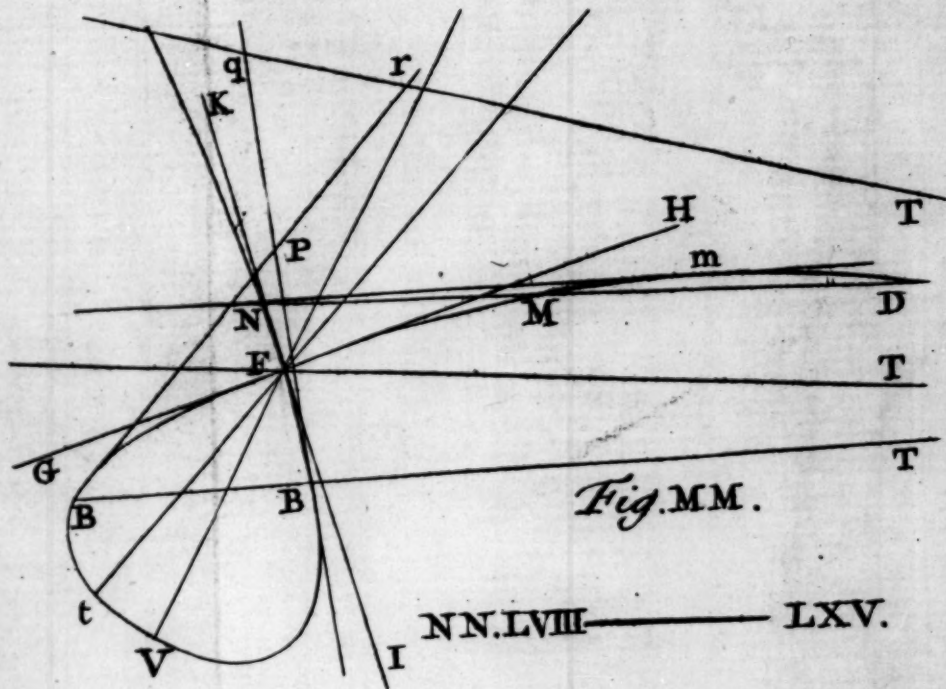
Curvas superiorum Ordinum (aut quasvis ipsarum *familias*) eodem ritu tractare licet, enumeratis primum *Speciebus* ceterarum *Genetricibus*. Sic in Lineis *Quarti Ordinis*, projiciantur Curvae Aequationibus y^4 et $y^4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, designatae; in *Quinto Ordine*, Aequationibus y^4 et $y^4 = ax^5 + bx^4 + \&c.$ In *Sexto* et *Septimo*, Ordinatae dimensiones sint, y^5 , y^4 , y^6 ; et sic porro. Istaе enim in Aequationes *ad Projectionem obliquam* transformatae,

122 *Genesis Curvarum, &c.*

formatae, generalissimae videntur esse
quas *Genetricis Ordo* requirat. Ve-
rum haec aliis prosequenda relin-
quo.

INDEX





INDEX PROJECTIONUM

Prout Speciebus a NEUTONO et STIRLINGIO enumeratis respondent.

<i>Project.</i>	<i>Neut.</i>	<i>Stirl.</i>	<i>Fig.</i>
I	39	43	44
II	55	59	59
III	21	23	27
IV	31	35	37
V	20	22	26
VI	56	60	60
VII	40	44	45
VIII	*	*	*
IX	*	11	*
X	10	10	17
XI	*	24	28
XII	33	37	39
XIII	52	56	56
XIV	9	9	15, 16
XV	26	31	32
XVI	46	50	50
XVII	1	1	1, 2
XVIII	27	31	33
XIX	43	47	49
XX	44	48	49
XXI	63	67	67
XXII	*	*	57
XXIII	*	15	21
XXIV	13	14	20
XXV	*	25	28

XXVI

124 *Index Projectionum.*

<i>Project.</i>	<i>Neut.</i>	<i>Stirl.</i>	<i>Fig.</i>
XXVI	36	40	42
XXVII	61	66	65
XXVIII	49	53	53
XXIX	4	4	7
XXX	62	65	66
XXXI	45	49	48, 49
XXXII	53	57	57
XXXIII	15	17	21
XXXIV	14	16	20
XXXV	17	19	23
XXXVI	16	18	22
XXXVII	29	33	35
XXXVIII	28	32	34
XXXIX	22	26	28
XL	23	27	29
XLI	32	36	38
XLII	37	42	42
XLIII	50	54	53, 54
XLIV	5	5	7, 8
XLV	6	6	9, 10
XLVI	24	28	30
XLVII	38	41	43
XLVIII	41	45	46
XLIX	54	58	58
L	19	21	25
LI	18	20	24
LII	30	34	36
LIII	60	64	64
LIV	11	12	18

LV

Index Projectionum. 125

<i>Project.</i>	<i>Neut. Stirl.</i>		<i>Fig.</i>
LV	34	38	40
LVI	51	55	55
LVII	8	8	11, 12
LVIII	7	7	13, 14
LIX	25	29	31
LX	57	61	61
LXI	66	70	72
LXII	2	2	3, 4
LXIII	47	51	51
LXIV	58	63	62
LXV	59	62	63
LXVI	42	46	47
LXVII	65	69	69
LXVIII	12	13	19
LXIX	35	39	41
LXX	64	68	68
LXXI	3	3	5, 6
LXXII	48	52	52
LXXIII	72	74	77
LXXIV	67	71	70, 71
LXXV	69	73	74
LXXVI	71	75	74, 75
LXXVII	68	72	73
LXXVIII	70	74	76

Nota.

Nota. Ordo Figurarum in Editione
D. *Jones* variat ab illâ post *Op-*
ticam Newtoni impressâ ut se-
quitur.

Neut. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,
Jones, 11, 12, 15, 16, 9, 10, 13,
N. 16, 72, 73, 74, 75, 76.
J. 14, 73, 74, 75, 76, 72.

F I N I S.

10 MA 65

